Kholles 22/03/2022

1 Exercices

1. Echauffement : Soit T une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée de variance σ^2 avec $\sigma \neq 0$. Pour pour tout $n \geqslant 2$, on dispose d'un échantillon indépendant $(T_1, \dots, T_n)$ de T.

   Montrer que le risque quadratique de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_i^2}{n}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ (on admettra que T^2 possède une variance).

2. Oral HEC :

   Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace probabilisé.

   1. a) Question de cours : rappeler la définition d'une tribu de parties de Ω.
      b) Donner trois exemples de tribus de parties de $\mathbb{N}$.

   2. On note C l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels $\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0$.
      a) Justifier l'égalité :
      $$C = \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\geq k} \left[|X_n| < \frac{1}{p}\right].$$
      b) En déduire que C est un élément de la tribu $\mathcal{A}$.

   On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 si la probabilité de l'événement C est égale à 1.

   3. a) Comparer, pour tout $\varepsilon > 0$, les deux événements $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n\geq k} \left[|X_n| \geq \varepsilon\right]$ et $\overline{C}$.
      b) En déduire que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

   4. Dans cette question, α désigne un réel strictement positif. On suppose que les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n^\alpha}$.
      a) Justifier que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.
      b) Soit p et k deux entiers strictement positifs.

      Calculer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la probabilité p_N de l'événement $\bigcap_{n=k}^{k+N} \left[|X_n| < \frac{1}{p}\right]$ et étudier la convergence de la suite $(p_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

      c) Pour quelles valeurs de α la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle presque sûrement vers 0 ?

3. (Bonus)

   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^{-n} \sum_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!}$.

   On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre 1 et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

   1. Donner la loi de S_n, ainsi que son espérance et sa variance.

   2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, exprimer u_n à l'aide de la variable aléatoire S_n.

   3. En déduire, en appliquant le théorème de la limite centrée, $\lim_{n\to+\infty} u_n$.