Kholles 18/01/2022

1 Exercices

1. Soit f l'application définie pour tous vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y)=(x_1-2x_2)(y_1-2y_2)+x_2y_2+(x_2+x_3)(y_2+y_3)$.
   (a) Montrer que f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. On notera désormais $f(x,y)=<x,y>$.
   (b) Montrer que $e_1=(1,1,1)$ et $e_2=(-3,-2,3)$ forment une famille orthonormée pour ce produit scalaire. Comparer avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2[X]$, on considère l'application g définie par $g(P,Q)=P(-1)Q(-1)+P(0)Q(0)+P(1)Q(1)$. Montrer que g est un produit scalaire. On notera alors $g(P,Q)=<P,Q>$.
   Calculer $<X^i,X^j>$ pour $i,j\in[[0,2]]$. En déduire que la famille $(1,X,X^2-\frac{2}{3})$ est orthogonale.
   Montrer que $F=Vect(1+X,1-X)$ et $G=Vect(X-X^2)$ sont orthogonaux.
3. Soit $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. On note $E=\mathbb{R}_n[X]$ et on pose $\phi(P,Q)=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$ pour $P,Q\in E$.
   (a) Montrer que si $P\in E$ admet un racine d'ordre $n+1$ alors P est nul. En déduire que ϕ est un produit scalaire.
   (b) On note, $\forall i\in\mathbb{R}$, $P_i=(X-a)^i$. Montre que $\{P_0,...,P_n\}$ est une base orthogonale de E. En déduire une base orthogonale de E.
   (c) Exprimer les coordonnées d'un polynôme P de E dans cette base à l'aide des dérivées successives de P en a. En déduire la formule de Taylor pour les polynôme.
4. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres et les espaces propres de A.
   Déterminer P inversible et D diagonale telles que $A=PD^tP$.
5. (Bonus)
   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
   $$\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{k}\leqslant\frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$
   (b) Montrer que pour $n\neq 0$ et $x_1,...,x_n>0$:
   $$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\geqslant n^2$$
   (c) En construisant le bon produit scalaire, déterminer le minimum de l'expression $\int_0^{+\infty}e^{-t}(t^3-at^2-bt-c)^2\,dt$.