Kholles A : 12/10/21

Robin Loris

1 Exercices

1. Discuter de la nature des intégrales suivantes :
$$\int_1^{+\infty} \frac{ln(t)}{t}\,dt \;\; et \;\; \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}, \;\; et \;\; \int_e^{+\infty} \frac{cos(t)}{e^t}\,dt$$
2. Donner la nature et la valeur des intégrales suivantes :
$$\int_0^1 \frac{cos(t)}{\sqrt{sin(t)}}\,dt \;\; et \;\; \int_0^1 ln(1+\frac{1}{t^2})\,dt$$
3. Déterminer la nature de
$$\int_0^1 ln(t^2+sin(t))\,dt$$
4. Soit f une fonction continue sur telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.
5. Soit $a>0$. Par l'étude de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \dfrac{dx}{x(ln(x))^a}$ en fonction de a, déterminer si $\sum \dfrac{1}{n(ln(n))^a}$ converge en fonction de a.
6. Soit f une fonction continue définie sur $[0;+\infty[$ telle que f et f'' soient intégrables. Montrer que $f'(x)\to 0$ quand $x\to+\infty$. Montrer que $f.f'$ est intégrable.
7. Déterminer la nature et donner la valeur de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} exp(t-e^t)\,dt$$
(on pourra utiliser le changement de variable $u=e^t$).
8. (Bonus) Calculer, après avoir justifier son existence :
$$\int_0^{+\infty} \frac{ln(t)}{t^2+a^2}\,dt$$
où $a>0$.
9. (Bonus) On considère une fonction positive et continue définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = l \in]0;1[$. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.