Kholles 11/01/2022

1 Exercices

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose $\phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$ pour $P,Q \in E$.

   (a) Montrer que si $P \in E$ admet un racine d'ordre $n+1$ alors P est nul. En déduire que ϕ est un produit scalaire.

   (b) On note, $\forall i \in \mathbb{R}$, $P_i = (X-a)^i$. Montre que $\{P_0, \dots, P_n\}$ est une base orthogonale de E. En déduire une base orthogonale de E.

   (c) Exprimer les coordonnées d'un polynôme P de E dans cette base à l'aide des dérivées successives de P en a. En déduire la formule de Taylor pour les polynôme.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres et les espaces propres de A.

   Déterminer P inversible et D diagonale telles que $A = PD^tP$.

3. (Bonus)

   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

   $$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

   (b) Montrer que pour $n \neq 0$ et $x_1, \dots, x_n > 0$:

   $$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geqslant n^2$$

   (c) En construisant le bon produit scalaire, déterminer le minimum de l'expression $\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2\,dt$.