Kholles 08/03/2022

1. **Question de cours :** matrice hessienne en un point x.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ puis calculer les dérivées premières et les dérivées secondes de f.
3. (a) Déterminer le seul point critique $(a_1, \ldots, a_n)$ de f sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Vérifier que la hessienne de f en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$ où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
4. Déterminer le rang de J_n.
   En déduire le spectre de J_n, puis celui de A_n.
5. Montrer que f admet un minimum local en $(a_1, \ldots, a_n)$ et préciser la valeur de ce minimum.
6. Dans cette dernière question, on va retrouver et préciser le résultat précédent par une méthode différente.
   Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\mathcal{C}_r$ la contrainte d'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2$ et $S_r = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2\right\}$.
   (a) Montrer que f admet un minimum global et un maximum global sous la contrainte $\mathcal{C}_r$.
   On note respectivement $m(r)$ et $M(r)$ la valeur de ce minimum et de ce maximum.
   (b) On admet que :

$$m(r) = \begin{cases} (n+1)r^2 - r\sqrt{n} & \text{si } 0 < r < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \\ r^2 - \dfrac{1}{4} & \text{si } r \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \end{cases} \quad \text{et} \quad M(r) = (n+1)r^2 + r\sqrt{n}$$

   En déduire que le minimum local obtenu à la question 5. est un minimum global.
   (c) Prouver le résultat admis à la question précédente.