Kholles 08/02/2022

1 Exercices

1. Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et la fonction F définie par $F(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$. Montrer pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{dF}{dx}(x,y,z) + \frac{dF}{dy}(x,y,z) + \frac{dF}{dz}(x,y,z) = 0$.
2. Soit A une matrice symétrique $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On désignera par une lettre minuscule un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et par sa majuscule le vecteur coordonnée dans la base canonique. On note f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par $f(x) =^t XAX$.
   (a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$
   (b) Montrer que pour tout entier $k \in [[1;n]]$ et pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, $\frac{df}{dx_k}(x) = 2\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}x_i$.
3. Soit F définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2$$
   Étudier les extremums de F.
4. Soit f la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ par $f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.
   (a) Vérifier que f admet une infinité de points critiques et les déterminer. Étudier la Hessienne de f en $A_a = (a,a,a)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ au travers de ces valeurs propres. Conclure sur la potentielle existence d'un extremum local.
   (b) Montrer que pour tout $z > 0$, $f(x,y,z) \geqslant \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y}{x}}$. Étudier la fonction $t \mapsto t + \frac{2}{\sqrt{t}}$ et en déduire que $f(x,y,z) \geqslant 3$. Conclure.
5. (bonus) On désigne par α un réel strictement positif et on considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$,à valeur dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
   (a) On suppose que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ et pour tout réel $t > 0$, $f(tu) = t^\alpha f(u)$ (on dit que f est homogène de degré α).
      i. Soit $u = (u_1, ..., u_n)$ fixé dans $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction g sur $]0;+\infty[$ par $g(t) = f(tu)$.
      Justifier la dérivabilité de g sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $t > 0$, exprimer $g'(t)$ à l'aide des dérivées partielle de f.
      ii. En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a : $\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{df}{dx_i}(u) = \alpha f(u)$
   (b) On ne suppose que f est homogène mais on suppose désormais que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a :
$$\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{df}{dx_i}(u) = \alpha f(u)$$
      Pour tout $u = (u_1, ..., u_n)$ fixé dans $\mathbb{R}^n$ on définie la fnction h sur $]0;+\infty[$ par
$$\forall t \in]0;+\infty[\ h(t) = f(tu) - t^\alpha f(u)$$
      i. Montrer que pour tout réel $t > 0$, $h't) = \frac{\alpha}{t}h(t)$
      ii. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{h(t)}{t^\alpha}$ est constante sur $]0;+\infty[$ et puis que h est nulle sur $]0;+\infty[$
      iii. Conclure.