

Kholle A : 04/01/2022

Robin Loris

1 Question de cours :

Une famille orthogonale est elle libre ou liée ? Prouver le !

2 Exercices

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose $\phi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$ pour $P, Q \in E$.

- (a) Montrer que si $P \in E$ admet un racine d'ordre $n + 1$ alors P est nul. En déduire que ϕ est un produit scalaire.
- (b) On note, $\forall i \in \mathbb{R}$, $P_i = (X - a)^i$. Montre que $\{P_0, \dots, P_n\}$ est une base orthogonale de E . En déduire une base orthogonale de E .
- (c) Exprimer les coordonnées d'un polynôme P de E dans cette base à l'aide des dérivées successives de P en a . En déduire la formule de Taylor pour les polynôme.

2. Soit (X, Y) un couple de V.A. suivant une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}^2$. Donner la loi de X et de Y ainsi que la loi de $X + Y$.

3. Soit X, Y deux VA suivant la loi exponentielle de paramètre λ . Donner la loi de $X + Y$.

(BONUS) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer

$$E[X(x-1)\dots(X-r+1)]$$