HEC ECS 1 : Les systèmes linéaires

1 Génŕalités

Définition 1.1. Une équation **linéaire** d'inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation du type : $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et b sont des réels. Le réel b est appelé "**second membre**". Les a_i sont appelés coefficients de l'équation.

Définition 1.2. Une solution de cette équation dans $\mathbb{R}^n$ est un élément $(r_1, \cdots, r_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $a_1r_1 + a_2r_2 + \cdots + a_nr_n = b$.

Définition 1.3. Un système d'équations linéaires est formé par un certain nombre d'équations linéaires aux mêmes inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Une **solution** de ce système dans $\mathbb{R}^n$ est un élément $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant chacune des équations.

Exemple 1.4. Lesquels de ces systèmes sont linéaires ?

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x-5y-t & = & 1 \\ x+y+2t-z & = & 3 \\ y-t & = & 0 \end{array}\right.$$

Oui, à 3 équations et 3 inconnues.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2-y & = & 6 \\ x-y & = & 0 \end{array}\right.$$

Non.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-2y & = & 1 \\ (x-y)(x-z) & = & 0 \end{array}\right.$$

Non (attention ce qui sépare les lignes d'un système d'équations est un "est", alors que $(x-y)(x-z) = 0 \Leftrightarrow x-y = 0$ ou $x-z = 0$).

Exemple 1.5. Donner une solution du système $\left\{\begin{array}{lcl} 2x-y+z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array}\right.$ dans $\mathbb{R}^3$.

$(1,1,-1)$ est solution car $2-1-1 = 0$ et $1-1 = 0$.

Définition 1.6. Résoudre un système, c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.
Deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple 1.7. Le symbole $\Leftrightarrow$ entre les systèmes suivants n'est pas correct ici : $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ -x+\frac{1}{2}y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right.$. En effet :

L'ensemble de solutions du système de droite est trivialement $\{(1,2)\}$ et celui de gauche n'est pas le même : en effet, $(1,2), (0,0), (2,4)$ sont solutions (en fait $(a,2a)$ l'est pour tout $a \in \mathbb{R}$).

Par contre, le symbole $\Leftrightarrow$ entre les systèmes suivants est correct : $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ x+y=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ 3x=3 \end{array}\right.$. En effet ils ont même ensemble de solutions, la résolution donne une unique solution $\{(1,2)\}$ pour les deux systèmes.

Remarque 1.8. On passe du premier système au second en remplaçant la seconde ligne par la somme des deux lignes du système. Cette opération se symbolise par : $(L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$. C'est une opération de type "élémentaire".

2 Le pivot de Gauss et les opérations élémentaires.

Pourquoi est-il simple de résoudre ce système : $\left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ y+3z=1 \\ 2z=3 \end{array}\right.$?

On peut dans l'ordre :"isoler z" puis remplacer z dans les lignes 1 et 2, puis isoler y dans la ligne 2 puis remplacer y ligne 1 puis isoler x ligne 1 et obtenir que ce système est équivalent à un système du type : $\left\{\begin{array}{l} x=a \\ y=b \\ z=c \end{array}\right.$

L'algorithme du "pivot de Gauss" permet de résoudre un système linéaire en triangularisant ce système grâce à une suite d'opérations élémentaires.

Définition 2.1. On appelle **opération élémentaire sur les équations d'un système linéaire** :
— permuter deux équations sans modifier les autres.
— multiplier une des équations par un réel non nul.
— ajouter à une équation une autre équation multipliée par un réel quelconque.

Théorème 2.2. ***Une opération élémentaire appliquée à un système d'équations linéaires transforme celui-ci en un système équivalent.***

Définition 2.3. Un système à n équations et à n inconnues est dit triangulaire s'il est de la forme suivante :
où les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont tous non nuls.

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} a_{1,1}x_1+ & a_{1,2}x_2+ & ...+ & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & a_{2,2}x_2+ & ...+ & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & ... & ... & ... & ... & ... \\ & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Un système à n équations et à p inconnues est dit échelonné s'il est de la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} a_{1,1}x_1+ & a_{1,2}x_2+ & a_{1,3}x_3+ & ...+ & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & a_{2,2}x_2+ & a_{2,3}x_3+ & ...+ & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ & & a_{r,r}x_r+ & ...+ & a_{n,n}x_n & = & b_r \\ & & & & 0 & = & b_{r+1} \\ & & & & ... & ... & ... \\ & & & & 0 & = & b_n \end{array}\right.$$

(on remarque que dans ce cas, le système n'a de solution que si $b_{r+1},...,b_n = 0$)

où les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont tous non nuls.
Dans les 2 cas, on appelle les $a_{i,i}$ les pivots du système.

Remarque 2.4. Ces systèmes sont particulièrement simples à résoudre, comme vu ci-dessus.

Exemple 2.5.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=2 \\ x-5y=3 \end{array}\right. \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ L_1 \leftrightarrow L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{l} x-5y=3 \\ 2x-y=2 \end{array}\right. \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ L_2-2L_1 \to L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{l} x-5y=3 \\ 9y=-4 \end{array}\right.$
$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3+5y=3-\dfrac{20}{9}=\dfrac{7}{9} \\ y=-\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$.
Ainsi $S=\{(7/9,-4/9)\}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=3 \\ x-2y+3z=-5 \\ 2x+y+5z=-3 \end{array}\right. \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ L_2-L_1 \to L_2 \\ L_3-2L_1 \to L_3 \end{array} \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=3 \\ -4y+2z=-8 \\ -3y+3z=-9 \end{array}\right. \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ 3L_2 \to L_2 \\ 4L_3 \to L_3 \end{array}$
$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=3 \\ -12y+6z=-24 \\ -12y+12z=-36 \end{array}\right. \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ \\ L_3-L_2 \to L_3 \end{array} \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=3 \\ -12y+6z=-24 \\ 6z=-12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=3 \\ y=\dfrac{24+6z}{12}=1 \\ z=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-2y-z=3 \\ y=1 \\ z=-2 \end{array}\right.$
Ainsi $S=\{(3,1,-2)\}$.

Théorème 2.6. *(admis) Tout système peut être ramené à un système échelonné équivalent en utilisant les opérations élémentaires.*

Remarque 2.7. Dans un système S, la ligne $0=0$ est toujours vrai et donc le système S est équivalent au système S sans cette ligne.
Dans un système S, la ligne $0=a$ (avec $a \neq 0$) est toujours faux et donc le système S n'a pas de solution.
Un système vide est toujours vrai.

3 Vocabulaire associé aux systèmes linéaires

Lorsque tous les seconds membres sont nuls (comme $\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ x-2y+3z=0 \\ 2x+y+5z=0 \end{array}\right.$), le système est dit **homogène**. Un système homogène a donc toujours au moins une solution : laquelle ? C'est $(0,....,0)=0_{\mathbb{R}^n}$.

Un système qui ne possède pas de solution est dit incompatible.

Lorsqu'on a autant d'équations que d'inconnues, on dit que le système est un **système de Cramer** lorsque ce système admet un **unique** n-uplet solution.

Exemple 3.1. Les systèmes $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x-5y=3 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x-2y+3z=-5 \\ 2x+y+5z=-3 \end{cases}$ vus ci-dessus sont de Cramer, mais pas $\begin{cases} 2x-y=0 \\ -x+\frac{1}{2}y=0 \end{cases}$ (vu ci-dessus aussi).

Un système qui est à la fois homogène et de Cramer admet donc comme unique solution le n-uplet $(0,0,\cdots,0)$.

Remarque 3.2. Pour un système **homogène**, si X est un n-upplets solution et Y aussi alors $X+\lambda Y$ l'est aussi.
En effet :
Supposons que le système à n variables $(z_1,....,z_n)$ est :

$$\begin{cases} a_{1,1}z_1+a_{1,2}z_2+...+a_{1,n}z_n & = & 0 \\ a_{2,1}z_1+a_{2,2}z_2+...+a_{2,n}z_n & = & 0 \\ .... & = & ... \\ a_{k,1}z_1+a_{k,2}z_2+...+a_{k,n}z_n & = & 0 \\ .... & = & ... \\ a_{n,1}z_1+a_{n,2}z_2+...+a_{n,n}z_n & = & 0 \end{cases}$$

$X=(x_1,...,x_n)$ est solution du système est équivalent à :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+...+a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+...+a_{2,n}x_n & = & 0 \\ .... & .... & ... \\ a_{k,1}x_1+a_{k,2}x_2+...+a_{k,n}x_n & = & 0 \\ .... & ...; & ... \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+...+a_{n,n}x_n & = & 0 \end{cases}$$

$Y=(y_1,...,y_n)$ est solution du système est équivalent à :

$$\begin{cases} a_{1,1}y_1+a_{1,2}y_2+...+a_{1,n}y_n & = & 0 \\ a_{2,1}y_1+a_{2,2}y_2+...+a_{2,n}y_n & = & 0 \\ .... & .... & ... \\ a_{k,1}y_1+a_{k,2}y_2+...+a_{k,n}y_n & = & 0 \\ .... & .... & ... \\ a_{n,1}y_1+a_{n,2}y_2+...+a_{n,n}y_n & = & 0 \end{cases}$$

On remarque que $X+\lambda Y=(x_1+\lambda y_1,...,x_n+\lambda y_n)$
Pour tout $k\in[[1,n]]$, $a_{k,1}(x_1+\lambda y_1)+a_{k,2}(x_2+\lambda y_2)+...+a_{k,n}(x_n+\lambda y_n)=a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+...+a_{1,n}x_n+\lambda(a_{1,1}y_1+a_{1,2}y_2+...+a_{1,n}y_n)=0+\lambda 0$ et donc :

$$\begin{cases} a_{1,1}(x_1+\lambda y_1)+a_{1,2}(x_2+\lambda y_2)+...+a_{1,n}(x_n+\lambda y_n) & = & 0 \\ a_{2,1}(x_1+\lambda y_1)+a_{2,2}(x_2+\lambda y_2)+...+a_{2,n}(x_n+\lambda y_n) & = & 0 \\ .... & .... & ... \\ a_{k,1}(x_1+\lambda y_1)+a_{k,2}(x_2+\lambda y_2)+...+a_{k,n}(x_n+\lambda y_n) & = & 0 \\ .... & .... & ... \\ a_{n,1}(x_1+\lambda y_1)+a_{n,2}(x_2+\lambda y_2)+...+a_{n,n}(x_n+\lambda y_n) & = & 0 \end{cases}$$

Ainsi $X+\lambda Y$ est solution du système.
On verra au second semestre que cela confère à cet ensemble de solution une structure d'espace vectoriel.

Corollaire 3.3. *Ainsi un système homogène admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions.*
De plus, un système linéaire admet soit une unique solution, soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

Démonstration. Si on considère un système homogène, alors soit seul $(0,...,0)$ est solution, soit il existe une autre solution X et alors pour tout $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\lambda_1 X\neq\lambda_2 X$ et la proposition précédente, appliquée avec $Y=0_{\mathbb{R}^n}$, nous donne que λX est solution du système. On en trouve donc bien une infinité.

Si on considère un système linéaire, alors soit le système n'a aucune solution, soit il en a une seule, soit il en possède au moins deux. Montrons que dans le dernier cas, il en possède alors une infinité :
Notons X et Y, ces solutions et notons que $X \neq Y$.
Notons (S) ce système et (H) le système homogène associé (celui où l'on remplace le second membre par des 0).
On remarque que si X et Y sont solutions de (S) alors $X-Y$ est solution de (H) et que si X_1 est solution de (S) et X_2 solution de (H) alors X_1+X_2 est solution de (S).
Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(X-Y)$ est solution de (H) et donc $X+\lambda(X-Y)=(\lambda+1)X-\lambda Y$ est solution de (S) : ceci nous donne bien une infinité de solutions.
(En effet, si cet ensemble était fini alors il existerait une infinité de $\beta \neq \lambda$ tel que $(\lambda+1)X-\lambda Y=(\beta+1)X-\beta Y$ c'est à dire $X(\lambda-\beta)-Y(\lambda-\beta)=(X-Y)(\lambda-\beta)=0$ et donc $X=Y$ ou $\lambda-\beta=0$ (propriété triviale) et donc $\lambda=\beta$ car $X \neq Y$).

$\square$

3.1 Quelques exemples de systèmes qui ne sont pas "de Cramer"

Méthode : on applique le pivot de Gauss "à la lettre", et dans le cas où apparait une ligne du type $0=a$ avec $a \neq 0$, alors le système n'a aucune solution.
Dans le cas où, suite à l'apparition de lignes du type $0=0$, le système contient alors plus de variables que de lignes, on termine le Pivot de Gauss, puis on exprime certaines variables en fonction d'autres (sans qu'il n'y est d'intersection en les variables "exprimées" et les variables "exprimant").

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{lcll} x-y+z & = & 2 & \Leftrightarrow \\ x+y+5z & = & 2 & L_2-L_1 \to L_2 \\ 2x-y+4z & = & 3 & L_3-2L_1 \to L_3 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{lcll} x-y+z & = & 2 & \Leftrightarrow \\ 2y+4z & = & 0 & \\ y+2z & = & -1 & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{lcl} x-y+z & = & 2 \\ y+2z & = & -1 \\ 2y+4z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad L_3-2L_2 \to L_3 \left\{\begin{array}{lcl} x-y+z & = & 2 \\ y+2z & = & -1 \\ 0 & = & 2 \end{array}\right.$$

Ainsi le système est incomptabile et $S=\emptyset$.

$$\left\{\begin{array}{ll} x-y=1 & \Leftrightarrow \\ y-z=0 & \\ z-x=-1 & L_3+L_1 \to L_1 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ll} x-y=1 & \Leftrightarrow \\ y-z=0 & \\ z-y=0 & L_3+L_2 \to L_3 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x-y=1 \\ y-z=0 \\ 0=0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+y=1+z \\ y=z \\ 0=0 \end{array}\right.$$

Ainsi $X=(x,y,z)$ est solution ssi $X=(1+z,z,z)$ et donc $S=\{(1+z,z,z) tq z \in \mathbb{R}\}$

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x-3y+z=1 & \Leftrightarrow \\ y-z=-1 & \\ 4x-5y+z=1 & L_3-2L_1 \to L_3 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ll} 2x-3y+z=1 & \Leftrightarrow \\ y-z=-1 & \\ y-z=-1 & L_3-L_2 \to L_3 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 2x-3y+z=1 \\ y-z=-1 \\ 0=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1+3y-z}{2}=\dfrac{-2+2z}{2}=-1+z \\ y=-1+z \end{array}\right.$$

Ainsi $X=(x,y,z)$ est solution ssi $X=(-1+z,-1+z,z)$ et donc $S=\{(-1+z,-1+z,z) tq z \in \mathbb{R}\}$