HEC ECS 1 : Les suites linéaires d'ordre 2 et la dérivée de fonctions composées

1 Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 1.1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence du type : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ où a et b sont deux constantes réelles, avec $b \neq 0$.

Exemple 1.2. La suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

La suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} - u_n$ n'est pas une suite récurrente linéaire d'ordre 2 car $\dfrac{1}{n+1}$ n'est pas une constante.

Remarque 1.3.
1. On peut remarquer que les suites arithmético-géométriques sont des suites récurrentes d'ordre 1.
2. Si on donne u_0 et u_1 alors par construction par récurrence, on a une unique suite qui respecte la relation de récurrence.
3. On remarque si $u_0 = u_1 = 0$ alors la suite est nul.

Théorème 1.4. *: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ où a et b sont deux réels, avec $b \neq 0$.*

*L'équation caractéristique associée à cette suite est : $x^2 - ax - b = 0$. On a **trois cas** :*

1. *Si $\Delta > 0$:*
   en notant r_1 et r_2 les deux solutions réelles de l'équation caractéristique, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$ où λ_1 et λ_2 sont deux constantes réelles que l'on peut calculer en utilisant u_0 et u_1.
2. *Si $\Delta = 0$:*
   en notant r la solution réelle de l'équation caractéristique, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda_1 + n\lambda_2)r^n$ où λ_1 et λ_2 sont deux constantes réelles que l'on peut calculer en utilisant u_0 et u_1.
3. *Si $\Delta < 0$: hors programme.*

Démonstration. Premier cas : si l'équation caractèristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 réelles.
On choisit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & u_0 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 & = & u_1 \end{cases}$ (possible par résolution simple du système : on obtient $(\dfrac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2}, \dfrac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1})$)
On montre alors par récurrence double que $P(n)$: $u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.
Initialisation : $n = 0$ et $n = 1$: c'est le choix de la λ_1, λ_2.
Hérédité : suppoons que la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$ et montrons la au rang $n+2$:
$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n = a(\lambda_1 r_1^{n+1} + \lambda_2 r_2^{n+1}) + b(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n) = \lambda_1 r_1^n(ar_1 + b) + \lambda_2 r_2^n(ar_2 + b) = \lambda_1 r_1^n r_1^2 + \lambda_2 r_2^n r_2^2 = \lambda_1 r_1^{n+2} + \lambda_2 r_2^{n+2}$
($r_1^2 = ar_1 + b$ car r_1 est solution de l'équation caractèristique, de même pour r_2)
Conclusion : classique.
La preueve est identique dans le cas $\Delta = 0$. □

Exemple 1.5. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$.

Calculer u_n en fonction de n.

1. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2
   (vérifier mentalement que a et b ne dépendent pas de n)
2. On résout l'équation $x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$
   Le discrinant vaut $\Delta = 9$ et les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$.
3. On a donc la forme de u_n : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda_1 1^n + \lambda_2(-2)^n = \lambda_1 + (-2)^n \lambda_2$
4. On calcule les constantes λ_1 et λ_2
   Comme $u_0 = 2$ et $u_1 = -1$ alors :
   $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 2 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & 2 - \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 & = & 1 \end{cases}$
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + (-2)^n$.

2 Dérivée de la fonction composée

Préambule Quelle condition doivent vérifier f et g pour que l'on puisse définir $g \circ f$?
$g \circ f(x)$ existe ssi $x \in D_f$ **et** $f(x) \in D_g$! !

Théorème 2.1. *Si f est dérivable sur I, à valeurs dans J et si g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et*

$$\boxed{(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'}$$

.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$, alors :

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Mais $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ car la fonction f est dérivable en $x_0 \in I$

Et, comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ par continuité de f en x_0 (car dérivable en x_0) alors, en posant $Y = f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim\limits_{Y \to f(x_0)} \dfrac{g(Y) - g(f(x_0))}{Y - f(x_0)} = g'(f(x_0))$ car la fonction g est dérivable en $f(x_0) \in J$.
Ainsi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

et donc $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$ □

Exemple 2.2. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leur ensemble de définition et donner leur fonction dérivée :

1. $x \mapsto \ln(1 - x^2)$
   On note $f : x \mapsto 1 - x^2$ et $g : y \mapsto ln(y)$
   On a que $g \circ f(x)$ est définie ssi $1 - x^2 > 0$ ssi $x \in]-1, 1[$
   Ainsi $D_{g \circ f} =]-1, 1[$
   Comme f est dérivable sur $]-1, 1[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ (car $1 - x^2 > 0$ si $x \in]-1, 1[$) et que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $g \circ f$ est dérivable sur $]-1, 1[$.
   De plus, pour tout $x \in]-1, 1[$, $(g \circ f)'(x) = \dfrac{-2x}{1 - x^2}$
2. $x \mapsto (-x + 3)^5$ On note $f : x \mapsto -x + 3$ et $g : y \mapsto y^5$
   On a que $g \circ f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ Ainsi $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$
   Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(x) = -5(-x + 3)^4$
3. $x \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ On note $f : x \mapsto \dfrac{\pi x}{2}$ et $g : y \mapsto sin(y)$
   On a que $g \circ f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ Ainsi $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$
   Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(x) = \dfrac{\pi}{2} cos(\dfrac{\pi x}{2})$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ On note $f : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $g : y \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{y}}$
   On a que $g \circ f(x)$ est définie ssi $x^2 + x + 1 > 0$ ssi $x \in \mathbb{R}$ (faire le calcul du discriminant)
   Ainsi $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$
   Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(x) = -\dfrac{1}{2}(2x + 1)\dfrac{1}{(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$
5. $x \mapsto \tan(x^2)$ On note $f : x \mapsto x^2$ et $g : y \mapsto y^5$
   On a que $g \circ f(x)$ est définie ssi $x^2 \notin \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ssi $x \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + k\pi}\,,\ -\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + k\pi} \mid k \in \mathbb{N}\}$
   Ainsi $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + k\pi}\,,\ -\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + k\pi} \mid k \in \mathbb{N}\}$
   Comme f est dérivable sur $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + k\pi}\,,\ -\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + k\pi} \mid k \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et que g

est dérivable sur $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\,,\ -\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \mid k \in \mathbb{N}\}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(x) = 2x(1 + tan^2(x^2))$

6. $x \mapsto f(ax+b)$ où f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et a et b deux réels. On note $h : x \mapsto ax+b$
On a que $f \circ h(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ Ainsi $D_{h \circ f} = \mathbb{R}$
Comme h est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $f \circ h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ h)'(x) = af'(ax+b)$