Chapitre 23 : Séries numériques.

1 Rappels sur les sommes

On rappelle les formules sur les sommes suivantes :

Proposition 1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et soit (u_n) une suite de nombres réels :*

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ *et* $\sum\limits_{k=n_0}^{n} q^k = q^{n_0} \dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *et* $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$

Remarque 1.2. On veillera à voir quels sont les variables muettes ou non (c'est à dire celles qui n'apparîtront plus une fois la somme calculé) : par exemple : $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k$: k est muet et n ne l'est pas.

Exemple 1.3.

1. $\sum\limits_{k=0}^{n+1} 3^k = \dfrac{1-3^{n+2}}{1-3} = 2 \times 3^{n+2} - 2$
2. $\sum\limits_{k=3}^{n+4} \dfrac{2}{3^k} = 2 \sum\limits_{k=3}^{n+4} (\dfrac{1}{3})^k = 2 \times \dfrac{1}{3^3} \dfrac{1-(1/3)^{n+1}}{1-(1/3)} = \dfrac{2}{27} \times \dfrac{3}{2}(1-(1/3)^{n+1}) = \dfrac{1}{9}(1-(1/3)^{n+1})$

   Or remarque que $\dfrac{1}{9}(1-(1/3)^{n+1}) \to \dfrac{1}{9}$ et donc $\sum\limits_{k=0}^{n+1} 3^k$ converge vers $1/9$.
3. $\sum\limits_{j=0}^{n} 3j - 2 = 3\dfrac{n(n+1)}{2} - 2(n+1) = \dfrac{(n+1)(3n+4)}{2}$

   De plus, $\dfrac{(n+1)(3n+4)}{2} \to +\infty$ donc $\sum\limits_{j=0}^{n} 3j-2$ diverge (vers $+\infty$).
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$

   Donc : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2} \to 1$ car $1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} \to 1$.
5. $\sum\limits_{k=1}^{n} ln(\dfrac{k+1}{k}) = \sum\limits_{k=1}^{n} ln(k+1) - ln(k) = ln(n+1) - ln(1) = ln(n+1) \to +\infty$

2 Généralités

Définition 2.1. On dit qu'une série de terme général $u_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, notée $\sum u_n$, est convergente si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ a une limite S quand n tend vers l'infini. Cette limite est encore notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Dans le cas où la suite (S_n) n'a pas de limite la série est dite divergente.

Étudier la **nature** d'une série $\sum u_n$ c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Définition 2.2. Dans le cas où la série $\sum u_n$ converge et S désigne sa somme, on appelle reste d'ordre n de la série le nombre $R_n = S - S_n$ noté encore $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

Remarque 2.3. La suite (u_n) peut n'être définie qu'à partir d'un certain entier n_0 et étudier la série $\sum u_n$ $(n \geq n_0)$ c'est étudier la convergence de la suite des sommes partielles $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$: de plus, il est évident que les premiers termes ne changent pas la nature de la série.

Exemple 2.4. Si on reprend les exemples précédents :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n+1} 3^k = \dfrac{1-3^{n+2}}{1-3} = 2 \times 3^{n+2} - 2 \to +\infty$ donc la série $\sum 3^k$ diverge.
2. $\sum\limits_{k=3}^{n+4} \dfrac{2}{3^k} = 2\sum\limits_{k=3}^{n+4}(\dfrac{1}{3})^k = 2 \times \dfrac{1}{3^3}\dfrac{1-(1/3)^{n+1}}{1-(1/3)} = \dfrac{2}{27} \times \dfrac{3}{2}(1-(1/3)^{n+1}) = \dfrac{1}{9}(1-(1/3)^{n+1}) \to \dfrac{1}{9}$ et donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 3} 3^k$ converge et la somme de cette série vaut : $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} \dfrac{2}{3^k} = 1/9$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(N+1)^2}$
   Donc : $\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2} \to 1$ donc $\sum \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge et la somme de cette série vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = 1$
4. Bien sûr, si on peut calculer la somme partielle, il suffit de regarder la limite de la somme partielle pour savoir si la série converge ou non, il est plus délicat dans le cas où cette somme est difficilement calculable : nous verrons des outils à ce sujet dans les parties suivantes.

Proposition 2.5. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Remarque 2.6. Ceci équivaut à dire que, si (u_n) ne tend pas vers 0, la série diverge. On dit alors que la série est *grossièrement divergente*.

Attention : Le fait que (u_n) tende vers zéro ne suffit pas pour que la série $\sum u_n$ converge comme le montre l'exemple de la série harmonique.

Exemple 2.7. $\sum 2^n$ est une série divergente grossièrement.

Proposition 2.8. *Soient (u_n) une suite de réels et (S_n) la suite des sommes partielles : on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Démonstration. C'est évident car $S_n - S_{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$. □

Proposition 2.9. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes de nombres réels alors, pour tout nombres réels λ et μ, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et l'on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Corollaire 2.10. *L'ensemble des séries convergentes est un sous espaces vectoriels de l'espace des suites réelles. En particulier, c'est un espace vectoriel.*

Remarque 2.11. Cette proposition montre que la somme de deux séries convergente est convergente. De même, la somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. Attention : on ne peut pas conclure en général quant à la nature de la somme de deux séries divergentes.

3 Les séries de référence

Proposition 3.1. *Soit $q \in \mathbb{R}$ alors la série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$. De plus,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = q^{n_0}\frac{1}{1-q} \quad et \quad \sum_{n=N+1}^{+\infty} q^n = \frac{q^{N+1}}{1-q}$$

Démonstration. On a que $\sum_{n=n_0}^{N} q^n = q^{n_0}\frac{1-q^{N+1-n_0}}{1-q}$ et donc comme $q^{n_0}\frac{1-q^{N+1-n_0}}{1-q}$ converge ssi $|q|<1$, et la somme de la série vaut $\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = q^{n_0}\frac{1}{1-q}$
De plus, la première formule se trouve en prenant $n_0 = 0$
De plus, $R_n = S - S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}}{1-q}$. □

Exemple 3.2. La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2$
La série $\sum_{n\geqslant 0}(\frac{3}{2})^n$ diverge.
La série $\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{3^n}$ converge $\frac{1}{3^4}\frac{1}{1-1/3} = \frac{3^3}{2} = \frac{27}{2}$.

Proposition 3.3. *Soit $q\in\mathbb{R}$ alors les séries de terme général nq^{n-1} et $n(n-1)q^{n-2}$ (appelées séries première et seconde de la série dérivée) converge si et seulement si $|q|<1$. De plus,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Démonstration. Si $|q|\geqslant 1$: divergence grossièrement, nous considérerons alors $q\neq 1$.
Soit $N\in\mathbb{N}$.
On pose $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{k=0}^{N} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$
Ainsi $\sum_{k=1}^{n} kq^k = q\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = q\frac{-(n+1)q^n(1-q)+(1-q^{n+1})}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2}(q^n(1-(n+1)(1-q))+1) \to \frac{q}{(1-q)^2}$
De même pour le second cas. □

Exemple 3.4.

1. Regardons $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n(n-1)}{2^n}$: on reconnaît une série dérivée seconde de la série géométrique de paramètre $1/2$ qui converge donc et de plus : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{2^n} = \frac{2}{(1-1/2)^3} = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 16$.
2. Regardons la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{n}{3^n}$:
   On a que que $\sum_{n=3}^{N}\frac{n}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N}\frac{n}{3^{n-1}} = \frac{1}{3}(\sum_{n=0}^{N} n\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{0}{3^{0-1}} - \frac{1}{3^{1-1}} - \frac{2}{3^{2-1}}) = \frac{1}{3}(\sum_{n=0}^{N} n\frac{1}{3^{n-1}} - 1 - \frac{2}{3}) \to \frac{1}{3}(\frac{1}{(1-1/3)^2} - 1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}(\frac{9}{4}-\frac{5}{3}) = \frac{3}{4}-\frac{5}{9} = \frac{7}{36}$ (on a utilisé le fait que $\sum_{n\geqslant 0} n\frac{1}{3^{n-1}}$ converge comme série dérivée de la série géométrique avec $q = 1/3 \in]-1,1[$)
   Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{n}{3^n}$ converge et $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n}{3^n} = \frac{7}{36}$
3. Regardons : $\sum_{n\geqslant 0} n^2x^n$.
   $\sum_{n=0}^{N} n^2x^n = \sum_{n=0}^{N} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{N} nx^n = x^2\sum_{n=0}^{N} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{N} nx^{n-1}$ Donc cette série converge ssi $|x|<1$ et de plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x^2+(1-x)x}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$

Théorème 3.5. *(admis mais prouvée plus tard) Pour tout réel x, la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$$

Exemple 3.6. 1. Regardons $\sum_{n\geqslant 0}\frac{18^n}{n!}$: cette série converge et sa somme vaut e^{18}.

2. Regardons $\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^{2n+1}}{n!}$: On remarque que $\frac{2^{2n+1}}{n!}=2\frac{4^n}{n!}$ et comme :
$\sum_{n=1}^{N}\frac{2^{2n+1}}{n!}=2\sum_{n=1}^{N}\frac{4^n}{n!}=2(\sum_{n=0}^{N}\frac{4^n}{n!}-1)\to 2(e^4-1)$
Ainsi $\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^{2n+1}}{n!}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n+1}}{n!}=2e^4-2$

3. Regardons $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+1}{n!}$: on remarque que $\frac{n+1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}$
Donc $\sum_{n=0}^{N}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\to e+e=2e$
Donc la série converge et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{n!}=2e$

Proposition 3.7. *On appelle série de Riemann une série de terme général $\frac{1}{n^s}$ avec $s\in\mathbb{R}$ (et $n\geqslant 1$).*
Cette série converge ssi $s>1$.

Démonstration. On remarque directement que si $s<0$ alors la série diverge grossièrement !
Soit $s\in\mathbb{R}_+^*$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors pour tout $t\in[n,n+1]$: $\frac{1}{(n+1)^s}\leqslant\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{n^s}$.
Ainsi

$$\frac{1}{(n+1)^s}=\int_n^{n+1}\frac{1}{(n+1)^s}\,dx\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{x^s}\,dx\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{n^s}\,dx=\frac{1}{n^s}$$

Ainsi en sommant cette inégalite entre 1 et $N\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(N+1)^s}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}-1=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^s}\leqslant\int_1^{N+1}\frac{1}{x^s}\,dx\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}$$

Ainsi

$$\frac{1}{(N+1)^s}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}-1=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^s}\leqslant\int_1^{N+1}\frac{1}{x^s}\,dx\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}\leqslant\int_1^{N+1}\frac{1}{x^s}\,dx-\frac{1}{(N+1)^s}+1$$

On remarque

$$\int_1^{N+1}\frac{1}{x^s}\,dx=\begin{cases}[\frac{-1}{(s-1)x^{s-1}}]_1^{N+1} & si\quad s>1\\ [ln(x)]_1^{N+1} & si\quad s=1\\ [\frac{-1}{(s-1)s^{s-1}}]_1^{N+1} & si\quad s<1\end{cases}=\begin{cases}\frac{-1}{(s-1)(N+1)^{s-1}}+\frac{1}{(s-1)} & si\quad s>1\\ ln(N+1) & si\quad s=1\\ \frac{-1}{(s-1)(N+1)^{s-1}}+\frac{1}{(s-1)} & si\quad s<1\end{cases}$$

$$\underset{N\to+\infty}{\to}\begin{cases}\frac{1}{(s-1)} & si\quad s>1\\ +\infty & si\quad s=1\\ +\infty & si\quad s<1\end{cases}$$

Ainsi par comparaison, si $s\leqslant 1$, $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}\to+\infty$.

Si $s>1$, alors $(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s})_N$ est une suite croissante, majorée donc converge. Ainsi on voit que $(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s})_N$ converge quand $N\to+\infty$ si et seulement si $s>1$. □

Exercice 1. Défi : En regardant $\int_2^n\frac{1}{tln(t)^2}dt$, montrer que la série $\sum\frac{1}{n(ln(n))^2}$ est convergente.

Exemple 3.8.

1. $\sum \frac{1}{n}$ diverge par crière de Riemann ($s = 1$)
2. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par crière de Riemann ($s = 2$)
3. $\sum n^{1/2}$ diverge par crière de Riemann ($s = -1/2$) (évident car elle diverge grossièrement).

4 Séries à termes positifs

Remarque 4.1. Dans le cas où $u_n \geqslant 0$ pour tout n, la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_n$ devient croissante et donc : soit elle converge vers l finie et sinon elle diverge vers $+\infty$
De plus, elle converge si et seulement si $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_n$ est majorée (attention les sommes partielles, pas la suite).

Proposition 4.2. *(admise mais simple à démontrer) Soit u et v deux suites telles qu'à partir d'un certain rang,*

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n aussi.
Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n aussi.

Exemple 4.3.

1. Regardons $\sum \frac{1}{n(n-1)}$: on a $0 \leqslant \frac{1}{n(n-1)} \leqslant \frac{1}{n^2}$ et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par critère de Riemann ($s = 2$) alors $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge aussi.
2. Il est possible de montrer que pour tout $x \in [0;\pi/2]$:
$$\frac{2x}{\pi} \leqslant sin(x) \leqslant x$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $sin(1/n) \geqslant \frac{2}{\pi n}$ (car $1/n \in [0;\pi/2]$) et donc comme $\sum \frac{2}{\pi n}$ diverge alors $\sum sin(1/n)$ diverge.
De plus, $0 \leqslant sin(1/n^2) \leqslant 1/n^2$ et donc comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par critère de Riemann alors $\sum sin(\frac{1}{n^2})$ aussi.

Proposition 4.4. *(admise mais simple à démontrer) Soient u et v deux suites réelles telles que v est positive à partir d'un certain rang et $u_n = o(v_n)$*
Si la suite de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge aussi.

Remarque 4.5. Attention, la proposition ne dit rien sur le cas de la divergence des séries.
Attention l'hypothèse de la positivité de v est importante.

Exemple 4.6. On a que $e^{-n^2} = o(1/n^2)$ car $\frac{e^{-n^2}}{1/n^2} = n^2 e^{-n^2} \to 0$ par CC et donc $\sum e^{-n^2}$ converge car $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann).

Proposition 4.7. *(admise) Soient u et v deux suites réelles telles que v est positive à partir d'un certain rang et $u_n \sim v_n$*
Alors les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

Exemple 4.8.

1. On a que $sin(1/n) \sim 1/n$ et $1/n > 0$ donc comme $\sum 1/n$ diverge alors $\sum sin(1/n)$ diverge aussi. De la même manière $\sum \sin(1/n^2)$ converge car $sin(1/n^2) \sim 1/n^2$
2. Étudions : $\sum cos(1/2^n) - 1$
Comme $cos(1/2^n) - 1 \sim -(\frac{1}{2^n})^2 = -\frac{1}{4^n}$ et comme $\sum -\frac{1}{4^n}$ converge et est de signe constant alors $\sum cos(1/2^n) - 1$ converge aussi.
3. Étudions $\sum \frac{3}{\sqrt{n}} sin(\frac{1}{n}) cos(\frac{2\pi}{n^2})$:
Comme $cos(\frac{2\pi}{n^2}) \to 1$ alors $\frac{3}{\sqrt{n}} sin(\frac{1}{n}) cos(\frac{2\pi}{n^2}) \sim \frac{3}{\sqrt{n}} \frac{1}{n} = \frac{3}{n^{3/2}}$ et donc comme $\frac{3}{n^{3/2}} > 0$ et $\sum \frac{3}{n^{3/2}}$ converge par critère de Riemann avec $s = 3/2$, alors $\sum \frac{3}{\sqrt{n}} sin(\frac{1}{n}) cos(\frac{2\pi}{n^2})$ converge.

4. Étudions $\sum \frac{n^2+2}{n^a+n+1}$ si $a \in \mathbb{R}$:
   Comme $\frac{n^2+2}{n^a+n+1} \sim \frac{n^2}{n} = \frac{1}{n}$ si $a < 1$ et donc comme $\frac{1}{n} > 0$ et que $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{n^2+2}{n^a+n+1}$ diverge.
   Si $a > 1$ alors $\frac{n^2+2}{n^a+n+1} \sim \frac{n^2}{n^a} = \frac{1}{n^{a-2}}$ et donc comme $\frac{1}{n} > 0$ et que $\sum \frac{1}{n^{a-2}}$ converge ssi $a > 3$ alors $\sum \frac{n^2+2}{n^a+n+1}$ converge ssi $a > 3$ au final.

Remarque 4.9. Les propositions fonctionnent encore dans le cas où v est négative à partir d'un certain rang : il suffit qu'elle soit de signe constant.

Méthode pour la convergence d'une suite :
Ici, nous traiterons le cas d'une méthode pour justifier la convergence d'une **suite** à l'aide d'une série (la suite pouvant être la suite des somme partielle d'une série).

On regarde $\sum_{n=1}^{N} u_n - u_{n-1} = u_N - u_0$: par exemple :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - ln(n+1)$

On calcule $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - ln(n+1) + ln(n) = \frac{1}{n} - ln(1+\frac{1}{n})$

On montre que (chapitre sur les développements limités à venir) $\frac{1}{n} - ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{2n^2}$

Or $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2n^2}$ converge par critère de Riemann $(s = 2)$ et donc $\sum_{n=2}^{N} u_n - u_{n-1} = u_N - u_1$ converge : donc (u_n) converge.

5 Convergence en valeur absolue

Définition 5.1. La série de terme général u_n converge absolument si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Théorème 5.2. *Si une série converge absolument alors elle converge.*
Attention, la réciproque est fausse.

Démonstration. Soit (u_n) une suite telle que $\sum |u_n|$ converge.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \begin{cases} u_n & si \quad u_n \geqslant 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$ et $u_n^- = \begin{cases} -u_n & si \quad u_n \leqslant 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$.
Ainsi il suffit de montrer que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent pour montrer que $\sum u_n$ converge
Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ donc $\sum u_n^+$ converge par CSTP. De même pour $\sum u_n^-$.
Ainsi $\sum u_n$ converge.
De plus, $|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n| = |\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-| \leqslant |\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+| + |\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-| = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. □

Exemple 5.3.

1. On étudie $\sum \frac{cos(n)}{n^2}$. Regardons $\sum |\frac{cos(n)}{n^2}|$:
   Comme $0 \leqslant |\frac{cos(n)}{n^2}| \leqslant \frac{1}{n^2}$ alors par comparaison de série à termes positifs (CSTP), $\sum |\frac{cos(n)}{n^2}|$ converge et donc $\sum \frac{cos(n)}{n^2}$ converge absolument de donc converge. Ce modère de rédaction est classique car l'étude se ramène donc à $\sum |u_n|$ qui est une série à termes positives. Attention néanmoins, certaines séries convergent sans converger absolument :
2. On peut montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge alors que $\sum \frac{1}{n}$ diverge : donc $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

Proposition 5.4. *Si* $\sum |u_n|$ *converge alors*

$$|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$$