Chapitre 14 : Les probabilités finies

Rappels de terminale

On appelle **expérience aléatoire** toute expérience donnant des résultats que l'on ne peut pas prévoir à priori. Lorsqu'on réalise une telle expérience, on obtient un résultat unique. L'ensemble des résultats possibles est appelé l'**univers** et se note Ω.
Dans ce chapitre, nous n'envisageons que le cas où Ω est un ensemble fini.
Certains faits liés à l'expérience peuvent se produire ou non. On les appelle événements. **Les événements sont des parties de Ω.**
Ω est appelé **l'événement certain** (car on est sûr qu'il se réalise).
$\emptyset$ est appelé **l'évènement impossible** (car on est sûr qu'il ne se réalise jamais).
Un singleton de Ω est appelé événement élémentaire.

Opérations sur les événements

Nous serons amenés à considérer des évènements composés à l'aide d'autres évènements. Ainsi si A et B sont deux événements liés à une même expérience aléatoire, on peut considérer :
- la non réalisation de A : l'évènement $\overline{A}$ (événement contraire).
- la réalisation simultanée de A et B : l'événement $A\cap B$.
- la réalisation de l'un au moins des événements : l'événement $A\cup B$.
- la réalisation de A pas celle de B : l'événement $A\setminus B$.

Définition : On dit que A et B sont **incompatibles** lorsque $A\cap B=\emptyset$.

0.1 Système complet d'événements

Système complet d'événements

Définition 0.1. Des événements $A_1,A_2,\cdots,A_n$ forment un **système complet d'événements** lorsque :
— $\forall (i,j)\in I^2$, tels que $i\neq j$, on a $A_i\cap A_j=\emptyset$. (les événements $A_1,A_2,\cdots,A_n$ sont 2 à 2 incompatibles)
— $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$.

1 Probabilités

1.1 Définition

Probabilité

Définition 1.1. On appelle **probabilité** sur $\mathcal{P}(\Omega)$ toute application $P:\mathcal{P}(\Omega)\to[0,1]$ vérifiant les deux conditions suivantes :
— $P(\Omega)=1$.
— Pour tout couple (A,B) d'évènements incompatibles, on a $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
(propriété d'additivité).

(Ω,P) est alors appelé **espace probabilisé** et pour tout événement $A\in\mathcal{P}(\Omega)$, $P(A)$ est la probabilité l'événement A.

Supposons Ω est de cardinal $n\geq 1$: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$. Le théorème suivant montre que pour définir une probabilité sur Ω, il est nécessaire et suffisant de connaitre la probabilité de tous les événements élémentaires $\{\omega_i\}$.

Théorème 1.2. *Soit $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ et $p_1,p_2,\cdots,p_n$ des réels. Alors il existe une probabilité P et une seule sur Ω telle que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $P(\{\omega_i\})=p_i$ si et seulement si* $\begin{cases}\forall i\in[\![1,n]\!],\ p_i\geq 0\\ \sum_{i=1}^{n} p_i=1\end{cases}$.
On a alors, pour tout évènement A, $P(A)=\sum_{i\in[\![1,n]\!]\mid\omega_i\in A} p_i$.

Démonstration. $\Rightarrow$) Supposons qu'il existe une telle probabilité, alors $p_i = P(\{w_i\}) \geqslant 0$, pour tout $i \in [[1,n]]$ par définition d'une probabilité. De plus, en anticipant un peu sur la formule 8 que nous montrerons indépendemment plus bas, comme $\{\{w_1\},....,\{w_n\}\}$ forme un système complet d'événements de manière trivial alors $\sum_{i=1}^{n} P(\{w_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

$\Leftarrow$) Supposons que $\begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!],\, p_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$.

Raisonnons par analyse synthèse :

On cherche les applications P qui respectent les axiomes de la définition d'une probabilité et telles que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$.

Soit $A \in P(\Omega)$, alors en anticipant un peu sur la formule 7 que nous montrerons indépendemment plus bas

$$P(A) = P(\bigcup_{i\in[[1,n]],\, w_i\in A} w_i) \underset{union\, disjointe}{=} \sum_{i\in[[1,n]],\, w_i\in A} P(\{w_i\}) = \sum_{i=1}^{n} 1_A(w_i)P(\{w_i\})$$

Où $1_A : \begin{cases} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ w & \mapsto & \begin{cases} 1 & si \quad w \in A \\ 0 & sinon \end{cases} \end{cases}$ Synthse : on vérifie que $P : \begin{cases} P(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} 1_A(w_i)P(\{w_i\}) \end{cases}$ définie bien une probabilité sur $P(\Omega)$.

P est à valeur dans $[0,1]$, car pour tout $A \in P(\Omega)$, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} 1_A(w_i)P(\{w_i\}) = \sum_{i=1}^{n} 1_A(w_i)p_i \geqslant 0$ par hypothèse. De plus $P(A) = \sum_{i=1}^{n} 1_A(w_i)p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Enfin, $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} 1_\Omega(w_i)p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Soit A et B deux événements disjoints, regardons $P(A \cup B) = \sum_{i=1}^{n} 1_{A\cup B}(w_i)p_i$

On remarque que $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$ (on regarde $1_{A\cup B}(w)$ pour $w \in A \cap B$, $w \in A \setminus B$, $w \in B \setminus A$ et enfin $w \in \bar{A} \cap \bar{B}$).

Ainsi $P(A \cup B) = \sum_{i=1}^{n} 1_{A\cup B}(w_i)p_i = \sum_{i=1}^{n} (1_A(w_i) + 1_B(w_i) - 1_{A\cap B}(w_i))p_i = \sum_{i=1}^{n} 1_A(w_i)p_i + \sum_{i=1}^{n} 1_B(w_i)p_i - \sum_{i=1}^{n} 1_{A\cap B}(w_i)p_i = P(A) + P(B) - 0 = P(A) + P(B)$

Ainsi on a bien prouvé l'unicité de la probabilité cherchée.

De plus, pour tout $A \in P(\Omega)$, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} 1_A(w_i)P(\{w_i\})$. □

Exercice 1. On considère une probabilité P sur $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ telle que :

$$P(\{1\})2 = P(\{2\}) = 3P(\{3\}) = 4P(\{4\}) = 5P(\{5\})$$

Trouver $P(\{1\})$

Comme $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ et que $P(\Omega) = 1$ alors par incompatibilité des singletons, $P1 = (\Omega) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + ... + P(\{5\}) = P(\{1\}) + \frac{1}{2}P(\{1\}) + \frac{1}{3}P(\{1\}) + \frac{1}{4}P(\{1\}) + \frac{1}{5}P(\{5\}) = P(\{1\})\frac{60+30+20+15+12}{60} = \frac{137}{60}P(\{1\})$

Ainsi $P(\{1\}) = \frac{60}{137}$

Proposition 1.3. *On appelle* **probabilité uniforme** *la probabilité P sur* $(\Omega, \P(\Omega))$ *telle que tous les évènements élémentaires* $\{\omega_i\}$ *pour* $i \in [\![1, \mathrm{Card}(\Omega)]\!]$ *ont la même probabilité. On dit dans ce cas qu'il y a* **équiprobabilité***.*

La probabilité commune de tous les événements élémentaires est $p = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ *et pour tout évènement A, on a*

$$\boxed{P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\textit{Nombres de cas favorables à A}}{\textit{Nombres de cas possibles}}}$$

.

Démonstration. Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité p, comme la somme de leurs probabilités vaut 1, alors on a : $\mathrm{Card}(\Omega) \times p = 1$ d'où $p = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Soit A un événement, en posant $n = \mathrm{Card}(\Omega)$, on a :

$P(A) = \sum_{i\in[\![1,n]\!] | \omega_i \in A} p = \sum_{i\in[\![1,n]\!] | \omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i\in[\![1,n]\!] | \omega_i \in A} 1 = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

□

Remarque 1.4. On utilise dans ces cas les méthodes du dénombrement pour déterminer ces probabilités : par exemple : on considère un QCM à 10 questions,avec 4 choix possibles. Donner la probabilité d'avoir exactement 6 bonnes réponses puis au moins 6 bonnes réponses si l'on répond au hasard.
Soit Ω l'ensemble des 10-uplets de réponses possibles pour le QCM. Comme chaque réponse est équiprobable (implicite), alors on peut utiliser la proposition ci-dessus :
$P(\text{"avoir exactement 6 bonnes réponses"}) = \dfrac{\text{Nombres de cas donnant 6 bonnes réponses}}{\text{Nombres de cas possibles}} = \dfrac{\binom{10}{6}\times 3^4}{4^{10}}$ (en effet, construire un tel tirage se fait en choisissant d'abord les 6 questions pour lesquels le choix de la réponse est fixe (la bonne) puis en choisissant une mauvaise réponse parmi trois pour les 4 autres).
$P(\text{"avoir au moins 6 bonnes réponses"}) \underset{union\,disjointe}{=} P(\text{"avoir 6 bonnes réponses"}) + P(\text{"avoir 7 bonnes réponses"}) + \ldots + P(\text{"avoir 10 b}$
$\dfrac{\binom{10}{6}\times 3^4}{4^{10}} + \dfrac{\binom{10}{7}\times 3^3}{4^{10}} + \dfrac{\binom{10}{8}\times 3^3}{4^{10}} + \dfrac{10\times 3}{4^{10}} + \dfrac{1}{4^{10}}$

1.2 Propriétés d'une probabilité

Proposition 1.5. *Soit $(\Omega, \P(\Omega), P)$ un espace probabilisé, on a :*

1. *Pour tout couple (A,B) d'évènements, $P(A\setminus B) = P(A) - P(A\cap B)$.*
2. *Pour tout évènement A, $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.*
3. *$P(\emptyset) = 0$.*
4. *Pour tout couple (A,B) d'évènements, $\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$.*
5. *Formule à savoir établir si besoin est à l'aide de la précédente :*

   Pour tout triplet (A,B,C) d'évènements,
   $\boxed{P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)}$.
6. *Si $A\subset B$ alors $P(A)\leq P(B)$ (propriété de croissance d'une probabilité)*
7. *Si $A_1,\ldots,A_n$ sont n évènements incompatibles deux à deux, alors $\boxed{P(A_1\cup\cdots\cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)}$.*
8. *Si les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forment un système complet d'évènements, alors $\boxed{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1}$.*
9. *Formule des probabilités totales : Soit $A_1, A_2, \cdots, A_n$ un système complet d'événements. Alors pour tout événement B, on a $\boxed{P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B\cap A_i)}$.*

   Application avec A et $\bar{A}$: $P(A) = P(B\cap\bar{A}) + P(B\cap B)$

Démonstration. En effet : Pour 1, 2, 3 et 4, il s'agit juste de la même démonstration que dans le cadre du dénombrement :
le 1 se prouve en remarquant que $A\setminus B\cup A\cap B = A$ (et l'union est disjointe)
Le 2 puis le 3 se prouve en utilisant 1.
Le 4 se prouve en remarquant que $A\cap B = B\cup(A\setminus B)$ (et l'union est disjointe)
Pour le 5 :
$P(A\cup B\cup C) = P(A\cup(B\cup C) = P(A)+P(B\cup C)-P(A\cap(B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P((A\cap B)\cup(A\cap C))$
Il suffit alors de remarquer que $P((A\cap B)\cup(A\cap C)) = P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$.
Pour le 6, si $A\subset B$ alors $A\cap B = A$ et donc $0\leqslant P(B\setminus A) = P(B)-P(B\cap A) = P(B)-P(A)$ et donc $P(B)\geqslant P(A)$.
Pour le 7 : Il s'agit juste d'une récurrence faite à l'aide de la définition d'une probabilité, elle repose dans l'hérédité sur :

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_{n+1}) = P((A_1\cup\cdots\cup A_n)\bigcup A_{n+1}) = P(A_1\cup\cdots\cup A_n)+P(A_{n+1}) = P(A_1)+\ldots+P(A_n)+P(A_{n+1})$$

(on a utilisé le fait que $(A_1\cup\cdots\cup A_n)\cap A_{n+1} = (A_1\cap A_{n+1})\bigcup\ldots\bigcup(A_n\cap A_{n+1}) = \emptyset$ car les événements sont disjoints deux à deux.
Le 8 est la conséquence directe du 7 en utilisant le fait que $P(\Omega) = 1$
Pour le 9 : cf l'exercice 5 de la fiche

□