# Chapitre 16 : Les polynômes, généralités

## 1 Polynôme à coefficients réels.

**Définition 1.1.** On appelle **polynôme** ou **fonction polynômiale** à coefficients dans $\mathbb{R}$ toute application $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $a_0, a_1, \cdots, a_n$ éléments de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Les nombres $a_k$ sont appelés **coefficients** du polynôme.

**Exemple 1.2.** $P : x \to 3x^5 - x + 11$ est un polynôme à coefficients réels. 11 est le coefficient de $x^0 = 1$, $-1$ est le coefficient de $x$, 0 celui de $x^2$, etc.

Si tous les $a_i$ sont égaux à 0, on obtient la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, que l'on appelle aussi **le polynôme nul**.

(unicité des coefficients d'un polynôme)

**Théorème 1.3.** *:*

1. *Si un polynôme $P$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$, alors tous ses coefficients sont nuls.*
2. *Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $a_0, a_1, \cdots, a_p, b_0, b_1, \cdots, b_n$ des nombres de $\mathbb{R}$ et on suppose $n \leq p$. On a :*

$$\left[\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k\right] \quad \Rightarrow \quad [a_0 = b_0, a_1 = b_1,\ \cdots, a_n = b_n \text{ et } b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = b_p = 0]$$

Finalement, un polynôme est entièrement déterminé par ses coefficients.

*Démonstration.* : On remarque directement que le premier point implique le second (la réciproque est vraie aussi mais cela importe peu ici) :
En effet, si on admet que la proposition 1 est vraie. Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $a_0, a_1, \cdots, a_p, b_0, b_1, \cdots, b_n$ des nombres de $\mathbb{R}$ avec $n \leq p$, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} (b_k - a_k) x^k - \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = 0$$

Ainsi si on pose $c_1 = b_1 - a_1$, ... , $c_n = b_n - a_n$, $c_{n+1} = -a_{n+1}$, ... , $c_p = -a_p$ alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{p} c_k x^k - \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = 0$$

Ainsi par la proposition 1, $c_k = 0$ pour tout $k \in [[1,p]]$, c'est à dire : $[a_0 = b_0, a_1 = b_1,\ \cdots, a_n = b_n$ et $b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = b_p = 0]$.

Prouvons maintenant la proposition 1 :
Soit $P$ un polynôme vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$.
On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x_n$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $n_0 \in [[0,n]]$ tel que $a_{n_0} \neq 0$. On note alors $n_1$ le plus grand entier $k$ tel que $a_k \neq 0$, ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n_1} a_k x^k = 0$.
Or alors $0 = \dfrac{P(x)}{x^{n_1}} = \sum\limits_{k=0}^{n_1} a_k x^{k-n_1} \underset{x \to +\infty}{\to} a_{n_1} = 0$ (car pour tout $k \in [[0, n_1 - 1]]$, $k - n_1 < 0$). C'est absurde.
Ainsi il n'existe pas $n_0 \in [[0,n]]$ tel que $a_{n_0} \neq 0$, ainsi pour tout $k \in [[0,n]]$, $a_k = 0$. $\square$

**Exemple 1.4.** Trouver LES réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^3+x^2-2x+5 = d(x-1)^3+c(x-1)^2+b(x-1)+a$.
On remarque $d(x-1)^3+c(x-1)^2+b(x-1)+a = d(x^3-3x^2+3x+1)+c(x^2-2x+1)+b(x-1)+a = dx^3+(-3d+c)x^2+(3d-2c+b)x+(d+c-b+a)$
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^3+x^2-2x+5 = d(x-1)^3+c(x-1)^2+b(x-1)+a \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2x^3+x^2-2x+5 = dx^3+(-3d+c)x^2+(3d-2c+b)x+(d+c-b+a) \Leftrightarrow \begin{cases} d &= 2 \\ -3d+c &= 1 \\ 3d-2c+b &= -2 \\ d+c-b+a &= 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d &= 2 \\ c &= 7 \\ b &= 6 \\ a &= 2 \end{cases}$

**Notation 1.5.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $X^k$ la fonction polynômiale $x \to x^k$.
En particulier, $X^0$ est la fonction constante égale à 1 et $X$ est l'application identité de $\mathbb{R}$.
Avec cette notation, un polynôme quelconque va s'écrire $P = a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$. Cette notation désigne la fonction polynômiale $x \to a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$.
On note indifféremment $P$ ou $P(X)$.
$\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

# 2 Degré et opérations

## 2.1 Degré et coefficient dominant d'un polynôme.

**Définition 2.1.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Si $P$ n'est pas le polynôme nul, alors on peut poser $P = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ avec $\boxed{a_n \neq 0}$ et le **degré** de $P$ est $n$. Le **coefficient dominant** de $P$ est $a_n$.
Un polynôme non nul est **unitaire** lorsque son coefficient dominant est 1.
Si $P$ est le polynôme nul, alors le degré de $P$ est par convention $-\infty$ (cela permet de donner un sens aux règles de calcul sur les degrés que nous verrons dans le paragraphe suivant).

**Exemple 2.2.**

1. Soit $P = 2$ (fonction constante égale à 2 sur $\mathbb{R}$). Quel est le degré de $P$ ? son coefficient dominant ?
   $deg(P) = 0$ et $C(P) = 2$.
2. Si $P$ vérifie $\deg(P) \leq 0$, qu'est ce que cela signifie ?
   Alors $P = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ou il existe $x \in \mathbb{R}^*$, $P = c, \forall x \in \mathbb{R}$, ainsi $P$ est constante.
3. Donner quelques exemples de polynômes unitaires.
   $P = X-1$, $P = X^2-3X+1$, ....
4. Soit $P = (\alpha-2)X^3-\alpha^2X^2-X+3\alpha^2-4$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner le degré de $P$ et son coefficient dominant selon les valeurs du paramètre $\alpha$.
   Si $\alpha \neq 2$, alors $deg(P) = 3$ et $C(P) = \alpha-2$.
   Si $\alpha = 2$, alors $deg(P) = 2$ et donc $C(P) = -4$.
5. Soit $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1+(-1)^k}{2^k}X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$. Donner le degré de $P_n$ et son coefficient dominant en distinguant deux cas.
   Si $n$ est pair alors $deg(P) = n$ et $C(P) = \dfrac{1+(-1)^n}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   Si $n$ est impair alors $deg(P) = n-1$ car $\dfrac{1+(-1)^n}{2^n} = 0$ et $\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \dfrac{1}{2^{n-2}} = C(P)$.

## 2.2 Opérations sur les polynômes et effet sur les degrés.

Nous allons faire des sommes, des produits, des combinaisons linéaires, des composées, des dérivées de polynômes. Le résultat est encore un polynôme.

**Exemple 2.3.** Soit $P = X^2+3X-1$ et $Q = 2X^2-1$. Calculer $-2P+Q$, $PQ$, $P \circ Q$ et $P'$.
$-2P+Q = -6X+1$, $PQ = 2X^4+6X^3-3X^2-3X+1$ et $P \circ Q = (2X^2-1)^2+3(2X^2-1)-1 = 4X^4-10X^2+6X^2-3$ et $P' = 2X+3$.

**Proposition 2.4.** *Soit $P$ et $Q$ dans $\mathbb{R}[X]$.*

1. $\boxed{deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)}$
2. $\boxed{deg(P+Q) \leq max(deg(P), deg(Q))}$ *avec égalité lorsque les degrés de $P$ et $Q$ sont distincts.*
3. $\boxed{deg(P') \leq deg(P) - 1}$ *(c'est en fait une égalité lorsque le degré de $P$ est au moins égal à 1)*

**Remarque 2.5.** Ces règles de calcul utilisent les conventions naturelles :
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) + a = -\infty$, $\max(-\infty, a) = a$, $-\infty \leq a$ avec $a \in \mathbb{N}$.

**Remarque 2.6.** Un exemple montrant pourquoi la propriété (2) n'est pas une égalité en général :
Soit $P = -2X^2 + X + 1$ et $Q = 2X^2 + X + 1$ et donc $P + Q = 2X + 2$ et donc $deg(P+Q) = 1 < max(deg(P), deg(Q)) = 2$.

**Remarque 2.7.** Si $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i X^i$ alors

$$PQ = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}) X^k$$

Si $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ alors

$$P' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} X^i$$

.

**Remarque 2.8.** On peut prouver que $deg(P \circ Q) = deg(P) deg(Q)$

**Exemple 2.9.**

1. Montrer que si $\deg(P) \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$) alors $\deg((X+1)P' - 3P) \leq n$.
   Aisni $deg(P') \leq n - 1$ et donc $deg((X+1)P') = n - 1 + 1 = n$ et comme $deg(-3P) = n$, ainsi $deg((X+1)P' - 3P) \leq max(deg(X+1)P', -3P) \leq n$
2. On définit par récurrence la suite de polynômes $(P_n)$ : $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = 2XP_n - P_n'$.
   Calculer $P_1$, $P_2$ et $P_3$. Conjecturer le degré et le coefficient dominant de $P_n$ puis démontrer cette conjecture par récurrence.
   $P_1 = 2X$, $P_2 = 4X^2 - 2$ et $P_3 = 8X^3 - 12X$
   On conjecture que $deg(P_n) = n$ et $C(P_n) = 2^n$.
   Montrons le par récurrence :
   I : $n = 0$, trivial.
   H : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $deg(P_n) = n$ et $C(P_n) = 2^n$.
   Ainsi $P_n = 2^n X^n + Q$ avec $deg(Q) \leqslant n - 1$.
   Comme $deg(2XP_n) = n + 1$ alors $deg(2XP_n - P_n') = n + 1$.
   De plus, comme $deg(P_n') < n$ alors $P_{n+1} = 2X(2^n X^n + Q) - n2^n X^{n-1} - Q' = 2^{n+1} X^{n+1} + (2XQ - n2^n X^{n-1} - Q')$
   Ainsi comme $deg(2XQ - n2^n X^{n-1} - Q') \leqslant n$ alors $C(P_{n+1}) = 2^{n+1}$.
   Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, alors elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## 2.3 Intégrité

Vrai ou Faux :

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$
   Vraie, évidemment.
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$
   Faux, cf cours sur les matrices.
3. Pour toutes fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$, $fg = 0 \Rightarrow f = 0$ ou $g = 0$
   Faux, il suffit que prendre $f$ nulle sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) = x$ et $g$ nulle sur $\mathbb{R}_-$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = x$. alors $fg = 0$ mais $f \neq 0$ et $g \neq 0$.

Voyons maintenant le cas des polynômes (qui sont des fonctions particulières) :

**Proposition 2.10.** $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\boxed{PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0}$

*Démonstration.* Par l'absurde, $P,Q$ deux polynômes non nuls tels $PQ = 0$
On note $n = deg(P)$, $p = deg(Q)$.
Dans le cas où l'un des deux est constant, c'est trivialement absurde (si par exemple, $P$ est constant, alors $P = c \in \mathbb{R}^*$ et comme $Q$ est non nul alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x_0) \neq 0$ , et alors $(PQ)(x_0) = cQ(x_0) \neq 0$ et que $PQ$ est non nul, ce qui est absurde).
Supposons que l'un des deux est non constant, par exemple $P$, ainsi $deg(P) > 0$.
Ainsi $deg(PQ) = n + p > 0$ ce qui est absurde. □

# 3 Division euclidienne

## 3.1 Théorème de division euclidienne.

Rappel d'arithmétique

Si on se donne un entier positif $a$ et un entier strictement positif $b$, on peut diviser $a$ par $b$ et on obtiendra $a = bq + r$ avec $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ et $0 \leq r < b$. Cette écriture est unique.

**Exemple 3.1.** diviser 1212 par 17.
On obtient $1212 = 17 \times 71 + 5$

indispensable

**Théorème 3.2.** *Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]^*$.*
*Il existe un unique couple de polynômes $(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que :*

$$\boxed{A = BQ + R \;\; ET \;\; deg(R) < deg(B)}$$

*$Q$ est appelé le quotient et $R$ le reste.*

**Exemple 3.3.** $A = X^4 + 2X + 1$ et $B = 1 - X^2$.
Effectuer les divisions euclidiennes de $A$ par $B$ puis de $B$ par $A$.
On obtient $A = B(-X^2 - 1) + 2X + 2$ et $B = 0A + 1 - X^2$.

## 3.2 Cas particulier de la division par $(X - a)$

On prend le polynôme $X^{55}$ et on le divise par $2X + 3$. Que peut-on dire du degré du reste ?
Comme $deg(R) < deg(2X + 3) = 1$
Ainsi $deg(R) \leqslant 0$
Calculer ce reste.
Ainsi $R = c$, et il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$, $X^{55} = Q(2X + 3) + c$ et donc en évaluant en $-3/2$, $R(-3/2) = c = (\frac{-3}{2})^{55} = -\frac{3^{55}}{2^{55}}$.
Ainsi $R = -\frac{3^{55}}{2^{55}}$ comme polynôme constant. **Attention :** Ce procédé ne fonctionne pas aussi simplement si l'on divise le polynôme $X^{55}$ par un polynôme de degré strictement supérieur à 1 :
Par exemple si l'on divise $X^{55}$ par $X^2 - 3X + 2$.
On remarque que $X^2 - 3X + 2 = (X - 2)(X - 1)$.
Ainsi il existe $Q,R \in R[X]$ tel que $X^{55} = Q(X - 2)(X - 1) + R$ et comme $deg(R) < 2$ alors il existe $a,b \in \mathbb{R}$ tel que $R = aX + b$.
Ainsi $X^{55} = Q(X - 2)(X - 1) + aX + b$
Ainsi en évaluant en 2 et en 1, $2^{55} = 2a + b$ et $1 = a + b$
Ainsi, $a = 2^{55} - 1$ et donc $b = 1 - a = 2 - 2^{55}$.

Démonstration importante

**Proposition 3.4.** *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.*
*Le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X - a)$ est le polynôme constant $P(a)$.*

*Démonstration.* Par la division euclidienne de $P$ par $X - a$ alors il existe $R,Q \in R[X]$ tel que $P = Q(X - a) + R$ avec $deg(R) \leqslant 0$ et donc $R = c \in \mathbb{R}^*$.
En évaluant en $a$, $P(a) = 0 + R(a) = c$ car $R$ est constant.
Ainsi $R = c$ comme polynôme constant. □

### 3.3 Divisibilité

**Définition 3.5.** Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]^*$. On dit que $B$ **divise** $A$ lorsque le reste de la division euclidienne de $A$ par $B$ est le polynôme nul, autrement dit lorsque l'on a $A = BQ$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$. On dit aussi que $A$ est **factorisable** par $B$ ou que $A$ est un multiple de $B$ ou que $A$ est divisible par $B$.

**Proposition 3.6.** *Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ avec $P$ non nul, on a*

1. *$P|P$ et $P|0$*
2. *Si $P|Q$ et $P|R$ alors $P|(Q+R)$ et $P|QR$*

**Exemple 3.7.** 1. Il est simple de voir si un polynôme $P$ est divisible par $(X-a)$ :

d'après la proposition précédente, si $P(a) = 0$ alors le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-a)$ est le polynôme nul, ainsi il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q(X-a)$ donc $P$ est divisible par $(X-a)$.

**Théorème 3.8.** *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

*(a) $a$ est une racine de $P$*

*(b) le reste de la division eulidienne de $P$ par $(X-a)$ est nul.*

*(c) $(X-a)|P$*

*Démonstration.* Nous montrerons $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$ puis que $3 \Rightarrow 1$.
$1 \Rightarrow 2$ est directe par la question précédente, car si $a$ est racine de $P$ alors $P(a) = 0$.
$2 \Rightarrow 3$ est également trivial, car par la division euclidienne de $P$ par $X-a$, il existe $Q, R \in R[X]$ tel que $P = Q(X-a)+R$. Par hypothèse, $P = Q(X-a)$ et donc $(X-a)|P$.
$3 \Rightarrow 1$ : Si $(X-a)|P$ alors il existe $Q \in R[X]$, tel que $P = (X-a)Q$ et donc $P(a) = (a-a)Q(a) = 0$ et donc $a$ est racine de $P$. □

2. $X^3 - X^2 - 2X$ est-il divisible par $(X-2)$ ? Finir de factoriser ce polynôme.
   Si on note $P$ ce polynôme, on remarque que $P(2) = 0$ et donc $P$ est divisible par $X-2$.
   Ainsi par règle sur les dégrés, il existe $Q \in R[X]$, tel que $deg(Q) = 2$ tel que $P = (X-2)Q$
   Comme 0 est racine de $P$ alors $0 = -2Q(0)$ et donc $Q(0) = 0$ ainsi $Q = XT$ avec $deg(T) = 1$ et donc $P = X(X-2)(aX+b) = (X^2-2X)(aX+b)$
   On trouve alors $a = 1$ et $b = 1$
   Ainsi $P = X(X-2)(X+1)$.
3. Cas particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X^n - 1$ est divisible par $(X-1)$ et on a la factorisation :
   Comme $1^n - 1 = 0$ alors $X^n - 1$ est divisible par $X-1$.
   On trouve que $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1)$