Chapitre 18 : Polynômes, théorèmes généralités

1 Dérivations successives

Dérivations successives

Définition 1.1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
On construit par récurrence la dérivée n-ième de P, notée $P^{(n)}$, par :

$$P^{(0)} = P \ , P^{(1)} = P' \ et \ P^{(n+1)} = (P^{(n)})'$$

Exemple 1.2.

1. Donner les dérivées successives de $P = X^5 - 2X^3 + X + 1$
   $P' = 5X^4 - 6X^2 + 1$, $P'' = 20X^3 - 12X$, $P'' = 60X^2 - 12$, $P^{(3)} = 120X$, $P^{(4)} = 120$ et $P^{(5)} = 0$. De plus, $P^{(k)} = 0$ pour tout $k \geqslant 5$.
2. Donner les dérivées successives de X^n :
   $(X^n)' = nX^{n-1}$, $(X^n)'' = n(n-1)X^{n-2}$.
   On a que $(X^n)^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)X^{n-k} & si \quad k \leqslant n \\ 0 & si \quad k > n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}X^{n-k} & si \quad k < n \\ n! & si \quad k = n \\ 0 & si \quad k > n \end{cases}$

Proposition 1.3. *Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$.*

Cas à savoir reproduire

Proposition 1.4. *Soient $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ alors :*

- *Si $j \leqslant n$, $P^{(j)} = \sum\limits_{k=j}^{n} a_k k(k-1)\dots(k-j+1)X^{k-j} = \sum\limits_{k=j}^{n} a_k \dfrac{k!}{(k-j)!} X^{k-j}$*
- *Si $j > n$ alors $P^{(j)} = 0$.*

Démonstration. Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$, alors $P^{(k)} = (\sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i)^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i (X^i)^{(k)}$
On utilise alors le résultat de l'exemple 1.2, et ainsi :
$P^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i (X^i)^{(k)} = \begin{cases} \sum\limits_{i=k}^{n} a_i \dfrac{i!}{(i-k)!} X^{i-k} & si \quad k \leqslant n \\ 0 & si \quad k > n \end{cases}$ □

Formule de Taylor pour les polynômes

Proposition 1.5. *Soit P un polynôme de degré n et soit $a \in \mathbb{R}$ alors*

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + P''(a)\frac{(X-a)^2}{2} + P^{(3)}(a)\frac{(X-a)^3}{6} + \dots + P^{(n)}(a)\frac{(X-a)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!}$$

En particulier avec $a = 0$, $P = \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)\dfrac{(X-a)^k}{k!}$

Démonstration. Soit P un polynôme de degré n, on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
Comme $\{1, (X-a), \dots, (X-a)^n\}$ est une base de E (famille génératrice par le cours, et libre car de degré 2 à 2 distincts), alors il existe $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tel que $P = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i (X-a)^i$.

Or pour tout $k \leqslant n$, $P^{(k)} = \sum_{i=k}^{n} b_i \frac{k!}{(i-k)!}(X-a)^{i-k}$ et donc $P^{(k)}(a) = b_k \frac{k!}{0!} 0^0 = b_k k!$.

Ainsi $P = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i$ □

Remarque 1.6. (lien avec la division euclidienne) On remarque que

$$P = \sum_{k=0}^{l-1} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!} + \sum_{k=l}^{n} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{l-1} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!} + (X-a)^l \sum_{k=l}^{n} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^{k-l}}{k!} = R + (X-a)^l Q$$

Avec $deg(R) < l$, donc on a ci-dessus la division euclidienne de P par $(X-a)^l$ dont le reste est $\sum_{k=0}^{l-1} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!}$.

Exemple 1.7. Le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $P'(1)(X-1)+P(1)$.
En utilisant la formule de Taylor, donner le reste de la division euclidienne de X^5-3X^2+1 par $(X+1)^3$.
Par la formule de Taylor, si on note $P = X^5-3X^2+1$, $P = P(-1)+P'(-1)(X+1)+P''(-1)(X+1)^2+(X+1)^3Q$ et donc le reste de la DE de X^5-3X^2+1 par $(X+1)^3$ est $P(-1)+P'(-1)(X+1)+P''(-1)(X+1) = -3+11(X+1)-26(X+1)^2 = \ldots$

2 Retour sur les racines

Factorisation et racines

Proposition 2.1. *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\alpha_1, \ldots., \alpha_n$ sont des racines de P, 2 à 2 distinctes alors :*

$$(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_n) \text{ divise } P$$

Ainsi, si $deg(P) = n$ alors P a au maximum n racines s'il n'est pas le polynôme nul.

Démonstration. On raisonne par récurrence : "pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, si $\alpha_1, \ldots., \alpha_n$ sont des racines de P, 2 à 2 distinctes alors : $(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_n)$ *divise* P.
I : $n = 1$, en effet, soit $P \in \mathbb{R}[X]$, si α_1 est racine de P alors par le chapitre précédent sur les polynômes, $X-\alpha_1$ divise P.
H : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que la propriété est vraie au rang n et montrons la au rang $n+1$:
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors soit $\alpha_1, \ldots., \alpha_n, \alpha_{n+1}$ sont des racines de P, 2 à 2 distinctes, comme $\alpha_1, \ldots., \alpha_n$ sont des racines de P, 2 à 2 distinctes alors, par hypothèse de récurrence : $(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_n)$ *divise* P
Et donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_n)$.
De plus, $P(\alpha_{n+1}) = 0$ donc $Q(\alpha_{n+1})(\alpha_{n+1}-\alpha_1)\ldots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)$ et comme $(\alpha_{n+1}-\alpha_1)\ldots(\alpha_{n+1}-\alpha_n) \neq 0$ alors $Q(\alpha_{n+1}) = 0$ et donc $X-\alpha_{n+1}$ divise Q, ainsi il existe $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = T(X-\alpha_{n+1})$.
Ainsi $P = T(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_n)(X-\alpha_{n+1})$ et donc $(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_n)(X-\alpha_{n+1})$ divise P.
Conclusion : ...

Ainsi supposons que P, un polynôme de degré n possède au moins $n+1$ racines noté $a_1, \ldots, a_{n+1}$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_{n+1})Q$ et donc $n = deg(P) = n+1+deg(Q)$ ce qui est impossible si $deg(P)$ n'est pas $-\infty$. Ainsi P est le polynôme nul. □

Remarque 2.2. Un polynôme qui possède plus de racines que son degré est le polynôme nul.

Exemple 2.3.
1. Le seul polynôme qui s'annule sur $[0,1]$ est le polynôme nul.
2. Montrer l'unicité du polynôme de degré 2 tel que $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ et $P(-1) = 1$.
   Soit T et Q deux polynômes respectant les conditions. Alors le polynôme $T-Q$ respecte $(T-Q)(1) = 0$, $(T-Q)(2) = 0$ et $(T-Q)(-1) = 0$ et donc $T-Q$ est polynôme de degré inférieur à 2 (car $deg(T-Q) \leqslant max(deg(T), deg(Q))$) qui possède trois racines. Ainsi $T-Q = 0$ et donc $T = Q$.
   Ainsi si un tel polynôme existe alors il est unique (attention, rien ne prouve son existence encore).

Multiplicité des racines

Définition 2.4. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. a est une racine de multiplicité m de P si et seulement si $(X-a)^m$ divise P ET $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P.
On parle de racine simple si la multiplicité est 1, et de racine double si c'est 2.

Remarque 2.5. Ceci est équivalent au fait que le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^m$ est nul mais pas celui par $(X-a)^{m+1}$

Exemple 2.6. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $P = ax^2 + bX + c$ est une racine double.
P admet une racine double si et seulement si $b^2 - 4ac = 0$ (et $a \neq 0$)

Carcatérisation de la multiplicité des racines

Théorème 2.7. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.*
a est une racine de P de multiplicité m si et seulement si $P^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., m-1$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Démonstration. Montrons d'abord que "a est une racine de P de multiplicité au moins m si et seulement si $P^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., m-1$" par double implication :
$\Rightarrow$) Supposons que $(X-a)^m$ divise P.
Alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-a)^m Q$. Ainsi $P(a) = 0$, et comme $P' = m(X-a)^{m-1}Q + (X-a)^m Q' = (X-a)^{m-1}R$ et donc $P'(a) = 0$.
Ainsi de suite, on montre pour tout $k \in [[0, m-1]]$, il existe $T \in \mathbb{R}[X]$, $P^{(k)} = (X-a)^{m-k}T$, $P^{(k)}(a) = 0$.

$\Leftarrow$) Supposons que $P^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., m$, alors par la formule de Taylor, $P = \sum_{i=0}^{n} (X-a)^i \frac{P^{(i)}(a)}{i!} = \sum_{i=m}^{n} (X-a)^i \frac{P^{(i)}(a)}{i!} = (X-a)^m (\sum_{i=m}^{n} (X-a)^{i-m} \frac{P^{(i)}(a)}{i!})$ et donc $(X-a)^m$ divise P.

Montrons maintenant la proposition : si a est une racine de multiplicité m alors $P^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., m-1$ et mais $P^{(m)}(a) = 0$ car sinon $(X-a)^{m+1}$ divise P.
Si $P^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., m-1$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$ alors $(X-a)^m$ divise m mais pas $(X-a)^{m+1}$ car sinon $P^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., m$. $\square$

Exercice 1. Montrer que le polynôme suivant admet une racine de multiplicité au moins 3 pour tout $n \geqslant 3$:

$$P_n = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$$

On calcule $P_n' = 2nX^{2n-1} + n(n+1)X^n + n(n-1)X^{n-2}$, $P_n'' = 2n(2n-1)X^{2n-2} + n^2(n+1)X^{n-1} + n(n-1)(n-2)X^{n-3}$
On remarque que $P_n(1) = P_n'(1) = P_n''(1) = 0$, et donc 1 est racine au moins triple de P_n.

Remarque 2.8. Supposons que P soit un polynôme de degré n possédant une racine de multiplicité $k > n$. Montrons que ce polynôme est le polynôme nul.
En effet, comme P possède une racine a de multiplicité k : alors $P(a) = 0$, $P'(a) = 0$, ..., $P^{(n)}(a) = 0$, ... , $P^{(k-1)}(a) = 0$.
Par la formule de Taylor, $P = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(a) \frac{(X-a)^i}{i!} = 0$.

Remarque 2.9. (Le cas des polynômes de degré 2) $P = aX^2 + bX + c$ (avec $a \neq 0$) admet une racine double réelle ssi $b^2 - 4ac = 0$.
Cette racine est alors $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
On a alors $P = a(X - x_0)^2$.

On peut retrouver le fait que x_0 est une racine double, en remarquant que, si $b^2 - 4ac = 0$, alors $P(\frac{-b}{2a}) = a\frac{b^2}{4a^2} + b\frac{-b}{2a} + c = \frac{b^2a - 2b^2a + 4a^2c}{4a^2} = \frac{a(4ac - b^2)}{4a^2} = 0$ et comme $P' = 2aX + b$ et donc $P'(\frac{-b}{2a}) = 0$.

3 Factorisation

Scindé

Définition 3.1. Un polynôme est dit scindé ssi il existe $(\alpha_1,...,\alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ et $(m_1,...,m_r) \in \mathbb{N}^r$ tels que

$$P = \prod_{k=0}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

Un polynôme est dit scindé ssi à racine simple il existe $(\alpha_1,...,\alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que

$$P = \prod_{k=0}^{n} (X - \alpha_i)$$

3.1 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 3.2. *Tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine.*

Démonstration. On note P un polynôme de degré impair. On suppose que le coefficient dominant de P est positif.
Ainsi P est une fonction continue (car polynômiale), tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ (ainsi il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a) > 0$) et $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ (ainsi il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $P(b) < 0$).
Par le TVI sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $P(c) = 0$.
Même preuve si le coefficient dominant de P est négatif.

$\square$

Exemple 3.3. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$: X^3-1, $(X^2+2)(X^3+1)$, X^4+X^2+1.
$X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$, $(X^2+2)(X^3+1) = (X^2+2)(X-1)(X^2-X-1) = (X^2+2)(X-1)(X-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(X-\frac{1-\sqrt{5}}{2})$.
$X^4+X^2+1 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$ (mais ce polynôme n'a pas de racine).

Théorème 3.4. *(admis) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors P se factorise en un produit de polynôme de degré 1 et de produit de polynôme de degré 2 de discrimant négatif strictement.*