HEC ECG 1 : Les nombres réels et inéquations

1 L'ordre sur $\mathbb{R}$

Tout d'abord, rappelons quelques définitions sur les opérations de base.

Définition 1.1. La somme et le produit de nombres réels sont :

1. Commutatifs : c'est à dire que $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a+b=b+a$ et $a.b=b.a$.
2. Associatifs : c'est à dire que $(a+b)+c=a+(b+c)$ et $(a.b).c=a.(b.c)$.

De plus, le produit est distributif sur la somme : $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, $a.(b+c)=a.b+a.c$
On définit également l'ordre sur $\mathbb{R}$ par :

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a-b \leqslant 0$$

Ainsi que :

$$a < b \Leftrightarrow a \leqslant b \text{ et } a \neq b$$

Proposition 1.2. *Rappels*
$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$:

- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a+c \leqslant b+d$. De même : si $a<b$ et $c<d$ alors $a+c<b+d$.*
- *Si $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$ alors $a.c \leqslant b.c$. De même : si $a<b$ et $c>0$ alors $a.c<b.c$.*
- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant 0$ alors $a.c \geqslant b.c$. De même : si $a<b$ et $c<0$ alors $a.c>b.c$.*
- *Si a et b sont **tout les 2 strictement positifs ou tout les 2 strictement négatifs** et $a \leqslant b$ alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$.*

Corollaire 1.3. *Soient $a_1,...,a_n$ et $b_1,...,b_n$ 2 suites de réels.*
Si $\forall i \in [[1,n]]$, $a_i \leqslant b_i$ alors $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$.
Si de plus, tous ces réels sont positifs alors : $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n} b_i$.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur la propriété $P(n)$: "si pour tout $i \in [[1;n]]$, $a_i \leqslant b_i$ alors $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$".

$n=1$: la proposition est évidente car si $a_1 \leqslant b_1$ alors $\sum\limits_{i=1}^{1} a_i = a_1 \leqslant b_1 = \sum\limits_{i=1}^{1} b_i$.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie au rang n montrons la au rang $n+1$:
Ainsi, on sait que si pour tout $i \in [[1;n]]$, $a_i \leqslant b_i$ alors $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$.
On suppose pour tout $i \in [[1;n+1]]$, $a_i \leqslant b_i$, ainsi par hypothèse de récurrence : $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ (car pour tout $i \in [[1;n]]$, $a_i \leqslant b_i$) et donc $\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + b_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n+1} b_i$
Conclusion : la proposition est initialisée et est hérédité, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ □

Exemple 1.4. Montrons que $n! \leqslant n^n$:

$n! = \prod\limits_{k=1}^{n} k \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n} n = n^n$
Montrons que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k-k} \geqslant \frac{2^n-1}{2^n}$:
On a $\frac{1}{2^k-k} \leqslant \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \in [[1;n]]$ (car $2^k-k \leqslant 2^k$).
Ainsi $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k-k} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{2}\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\frac{2^n-1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = \frac{2^n-1}{2^n}$

2 La valeur absolue et les inégalités triangulaires

Définition 2.1. Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue de a, notée $|a|$, par :

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geqslant 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Remarque 2.2. On a que $\sqrt{x^2} = |x|$. Par exemple : $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$.
On a le graphe suivant :

Exemple 2.3. Résoudre $|x| \leqslant |x^2|$ (notée (E)) :
On va faire un disjonction de cas :
Sur $[0;+\infty[$, $(E) \Leftrightarrow x \leqslant x^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x(x-1)$
Ainsi comme $x \geqslant 0$, $(E) \Leftrightarrow 0 \leqslant x-1 \Leftrightarrow 1 \leqslant x$
Sur $]-\infty;0]$, $(E) \Leftrightarrow -x \leqslant x^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x(x+1)$
Ainsi comme $x \leqslant 0$, $(E) \Leftrightarrow 0 \geqslant x+1 \Leftrightarrow -1 \geqslant x$
Ainsi $S =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

Méthode 2, beaucoup plus simple : $(E) \Leftrightarrow |x| \leqslant |x|.|x| \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow |x| \geqslant 1$ (sauf si $x=0$) (car $|x| > 0$ dans ce cas). Donc $(E) \Leftrightarrow x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$.

Exemple 2.4. Résoudre

$$-3|ln(x)| + ln(x)^2 + 2 = 0$$

:
On pose $X = |ln(x)|$,

$$-3|ln(x)| + ln(x)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow -3X + X^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 2$$

Ainsi

$$-3|ln(x)|+ln(x)^2+2=0 \Leftrightarrow |ln(x)|=1 \text{ ou } |ln(x)|=2 \Leftrightarrow ln(x)=1 \text{ ou } ln(x)=-1 \text{ ou } ln(x)=2 \text{ ou } ln(x)=-2 \Leftrightarrow x=e \text{ ou } x=e^{-1} \text{ ou}$$

Ainsi $S = \{e, e^{-1}, e^2, e^{-2}\}$.

Proposition 2.5. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|a \times b| = |a| \times |b|$

Démonstration. Cf chapitre 0 □

Proposition 2.6. *Les inégalités triangulaires* $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$||x| - |y|| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

De plus, on a $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow x$ *et* y *sont de même signes.*
L'inégalité triangulaire se généralise : $\forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ *:*

$$|\sum_{k=1}^{n} x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Démonstration. Soit $x, y \in \mathbb{R}$:
On distingue 4 cas :
Si $x, y \leqslant 0$ alors $|x+y| = x+y$ et $|x| = x$ et $|y| = y$ donc $|x+y| = |x| + |y|$.
Si $x, y \geqslant 0$ alors $|x+y| = -(x+y) = -x-y$ et $|x| = -x$ et $|y| = -y$ donc $|x+y| = -x-y = |x| + |y|$.
Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ (le cas $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ est similaire) alors il faut encore distinguer 2 autres cas :
Si $x+y \geqslant 0$ (c'ést à dire $x \geqslant -y$ alors $|x+y| = x+y$ et $|x| = x$ et $|y| = -y$.
Or $x+y \leqslant x-y$ car $y \leqslant 0$ et $-y \geqslant 0$.

Si $x+y \leqslant 0$ (c'ést à dire $x \leqslant -y$ alors $|x+y| = -x-y$ et $|x| = x$ et $|y| = -y$.
Or $-x-y \leqslant x-y$ car $x \geqslant 0$ et $-x \leqslant 0$.
D'où le résultat.

Pour montrer $||x|-|y|| \leqslant |x+y|$, on montre $-|x+y| \leqslant |x|-|y| \leqslant |x+y|$
On applique la formule montrée précédement, avec $x = c+d$ et $y = -d$ ainsi $|x+y| \leqslant |x|+|y| \Leftrightarrow |c| \leqslant |c+d|+|d| \Leftrightarrow |c|-|d| \leqslant |c+d|$
On applique la formule montrée précédement, avec $x = -d$ et $y = c+d$ ainsi $|x+y| \leqslant |x|+|y| \Leftrightarrow |c| \leqslant |d|+|c+d| \Leftrightarrow |c|-|d| \leqslant |c+d|$
D'où le résultat. □

Exemple 2.7. 1. Montrons que $|\sum_{k=0}^{n} \frac{cos(k)}{(1+k)3^k}| \leqslant \frac{3}{2}$:

$$|\sum_{k=0}^{n} \frac{cos(k)}{(1+k)3^k}| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\frac{cos(k)}{(1+k)3^k}| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+k)3^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \leqslant \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$$

2. (a) Factoriser $a^n - b^n$ par $a-b$.
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$ car $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}) = a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+ab^{n-1}+b^n-a^{n-1}b-a^{n-2}b^2-a^{n-3}b^3-\ldots-ab^{n-1}-b^n = a^n-b^n$

(b) Supposons $|a| \leqslant 2$ et $|b| \leqslant 2$, $|a^n-b^n| = |a-b||\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}| \leqslant |a-b|\sum_{k=0}^{n-1} |a|^k |b|^{n-k-1} \leqslant |a-b|\sum_{k=0}^{n-1} 2^k 2^{n-k-1} = |a-b|\sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-1} = |a-b|n2^{n-1}$

3. (défi) Montrer que $|sin(nx)| \leqslant n|sin(x)|$.

3 Les intervalles

Définition 3.1. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}$ qui s'écrit sous la forme :
- $[a,b]$ (fermé, borné : on parle de segment)
- $]a,b]$ (semi ouvert ou semi fermé, borné)
- $[a,b[$ (semi ouvert ou semi fermé, borné)
- $]a,b[$ (ouvert, borné)
- $]-\infty,a[$ (ouvert, non borné)
- $]-\infty,a]$ (fermé, non borné)
- $]a,+\infty[$ (ouvert, non borné)
- $[a,+\infty[$ (fermé, non borné)

Avec $a < b \in \mathbb{R}$.
De plus $\mathbb{R}$ est aussi un intervalle (qui est ouvert et fermé)

Proposition 3.2. *Soit I un sous ensemble de $\mathbb{R}$ alors :*
I est un intervalle si et seulement si $\forall x,y \in I$, $[x,y] \subset I$.

Remarque 3.3. On peut définir l'adhérence d'un intervalle I par $\bar{I}$ qui correspond à l'intervalle I auquel on a rajouté les bords. Celui ci est donc toujours fermé.
De même, on peut définir l'intérieur d'un intervalle I par qui correspond à l'intervalle I auquel on a enlevé les bords. Ainsi celui ci est toujours ouvert.

4 Résoudre des inéquations

4.1 Préambules : Résoudre des inéquations de base et à l'aide de tableaux de signes

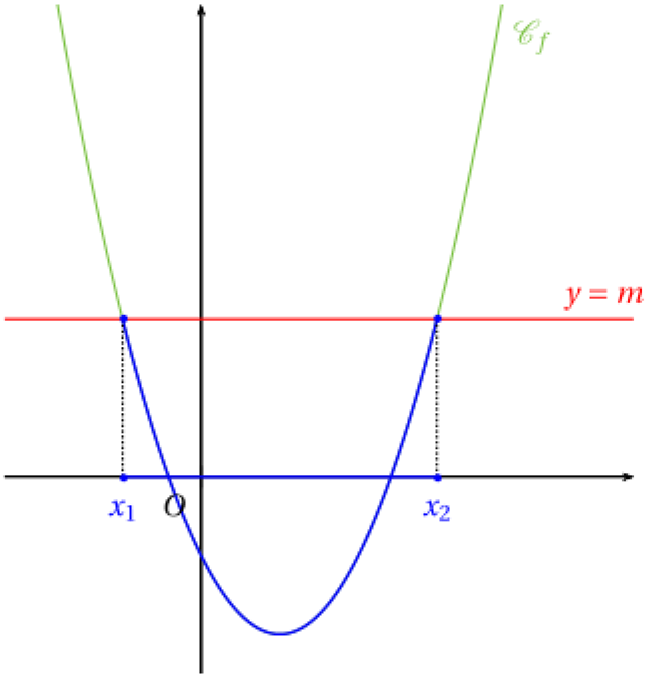
Aucun retour ne sera fait en classe, néanmoins, vous pouvez me demander le polycopié en lien.

4.2 Usage des fonctions

Soit f une fonction définie sur D de courbe représentative C_f et m un réel.

1. Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant m$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés au dessous de la droite horizontale d'équation $y = m$ (on inclut les points d'intersection si l'inégalité est large, on les exclut si l'inégalité est stricte).
2. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant m$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés au dessus de la droite horizontale d'équation $y = m$ (on inclut les points d'intersection si l'inégalité est large, on les exclut si l'inégalité est stricte).

3. Les solutions de l'inéquation $f(x) = m$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés à l'intersection avec la droite horizontale d'équation $y = m$.



Exemple 4.1.
Sur la figure ci dessus, l'inéquation $f(x) \leqslant m$ a pour solution l'intervalle $[x_1; x_2]$.

Remarque 4.2. Attention, l'usage de la courbe représentative de fonctions est un outil pour retrouver une formule ou vérifier une solution, non une preuve.

4.3 Inéquations ....

Dans ce paragraphe-rappel, aucun exemple ne sera donné et aucune preuve se sera faite. Néanmoins, des exercices seront faits sur la fiche.

4.3.1 Carrées

Proposition 4.3.

$$x^2 \leqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{a} \leqslant x \leqslant \sqrt{a} & si \quad a \geqslant 0 \\ impossible & si \quad a < 0 \end{cases}$$

$$x^2 \geqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\sqrt{a} \text{ } ou \text{ } x \geqslant \sqrt{a} & si \quad a > 0 \\ x \in \mathbb{R} & si \quad a \leqslant 0 \end{cases}$$

4.3.2 Valeurs absolues

Proposition 4.4.

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} -a \leqslant x \leqslant a & si \quad a \geqslant 0 \\ impossible & si \quad a < 0 \end{cases}$$

$$|x| \geqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -a \text{ } ou \text{ } x \geqslant a & si \quad a > 0 \\ x \in \mathbb{R} & si \quad a \leqslant 0 \end{cases}$$

4.3.3 Trinômes du second degré

Proposition 4.5. *On cherche le signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On rappelle que :*

— *On note $\Delta = b^2 - 4ac$*

— *Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet 2 solutions $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines.*

— *Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet aucune solution réelle et $P(x)$ est du signe de a.*

— *Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une unique solution réelle $\frac{-b}{2a}$ et $P(x)$ est du signe de a, mais attention, pour les inégalité strictes $P(x)$ s'annule en $\frac{-b}{2a}$.*

4.3.4 Racines carrées

Proposition 4.6.

$$\sqrt{x} \leqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a^2 & si \quad a \geqslant 0 \\ impossible & si \quad a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x} \geqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant a^2 & si \quad a \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 & si \quad a < 0 \end{cases}$$

4.3.5 Inverses

Proposition 4.7.

$$\frac{1}{x} \leqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \ ou \ x \geqslant \frac{1}{a} & si \quad a > 0 \\ x < 0 & si \quad a = 0 \\ 0 < x \leqslant \frac{1}{a} & si \quad a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} \geqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leqslant \frac{1}{a} & si \quad a > 0 \\ x > 0 & si \quad a = 0 \\ x > 0 ou 0 < x \leqslant \frac{1}{a} & si \quad a < 0 \end{cases}$$

4.3.6 Puissances

Proposition 4.8. *1. Si p est paire*

$$x^p \leqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt[p]{a} \leqslant x \leqslant \sqrt[p]{a} & si \quad a \geqslant 0 \\ impossible & si \quad a < 0 \end{cases}$$

$$x^p \geqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\sqrt[p]{a} \ ou \ x \geqslant \sqrt[p]{a} & si \quad a > 0 \\ x \in \mathbb{R} & si \quad a \leqslant 0 \end{cases}$$

2. Si p est impaire, $x^p \leqslant a \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt[p]{a}$ et $x^p \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt[p]{a}$

4.3.7 Logarithmes et exponentielles

Proposition 4.9. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $ln(x) \geqslant ln(y) \Leftrightarrow x \geqslant y$*
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $exp(x) \geqslant exp(y) \Leftrightarrow x \geqslant y$

$$ln(x) \leqslant a \Leftrightarrow 0 < x \leqslant exp(a)$$

$$ln(x) \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant exp(a)$$

$$exp(x) \leqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant ln(a) & si \quad a > 0 \\ impossible & si \quad a \leqslant 0 \end{cases}$$

$$exp(x) \geqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant ln(a) & si \quad a > 0 \\ x \in \mathbb{R} & si \quad a \leqslant 0 \end{cases}$$

5 Les bornes supérieures et inférieures

Définition 5.1. On considère une partie non vide E de $\mathbb{R}$.

— m est un minorant de E si $\forall x \in E$, $m \leqslant x$. On dit que E est minorée si elle admet un minorant.
— M est un majorant de E si $\forall x \in E$, $M \geqslant x$. On dit que E est majorée si elle admet un majorant.
— On dit que E est bornée si elle admet un minorant et un majorant c'est à dire que :

$$\exists K > 0; \ \forall x \in E \ |x| \leqslant K$$

Remarque 5.2. Attention, il n'y a pas unicité du minorant et du majorant.

Exemple 5.3. Soit $E = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$ alors 1 est un majorant (ainsi que tout nombre supérieur à 1) et 0 un minorant (ainsi que tout nombre inférieur à 0).

Définition 5.4. On considère une partie non vide E de $\mathbb{R}$.
- m est le minimum de E si $\forall x \in E, m \leqslant x$ et $m \in E$.
- M est le maximum de E si $\forall x \in E, M \geqslant x$ et $M \in E$.

Remarque 5.5. Attention, l'existence du minimum ou du maximum n'est pas garantie, même dans le cas d'une partie bornée. Par exemple, si $E = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$ alors 1 est la maximum mais E n'admet pas de minimum car :
Il est évident que $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$
De plus, $0 \leqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Enfin, si on suppose qu'il existe un minimum m alors $m = \dfrac{1}{n_0}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{n_0}$.
Or pour $n = n_0 + 1$, $\dfrac{1}{n_0+1} \leqslant \dfrac{1}{n_0}$.

Définition 5.6. On considère une partie non vide E de $\mathbb{R}$.
- La borne supérieure de E est le plus petit des majorants de E, sous réserve d'existence.
  On a donc $sup(E) = min\{M \in \mathbb{R} | M\, est\, un\, majorant\, de\, E\}$.
- La borne inférieur de E est le plus grand des minorants de E, sous réserve d'existence.
  On a donc $inf(E) = max\{M \in \mathbb{R} | M\, est\, un\, minorant\, de\, E\}$.

Exemple 5.7. Pour tout les ensembles suivants, donner si ils existent leurs bornes inf et sup, leurs min et max :
1. $A =]-3, 9]$, $inf(A) = 3$, $sup(A) = 9$, $min(A)$ n'existe pas, $max(A) = 9$.
2. $B = \{\dfrac{(-1)^n}{n^2} | n \in \mathbb{N}^*\}$
   $max(B) = 1/4$, $sup(B) = 1/4$, $min(B) = -1$ et $inf(B) = -1$ (ce trouve facilement à l'aide de la distinction entre les cas n paires et n impaires.
3. $C = \{\dfrac{x^2}{x^2+4} | x \in \mathbb{R}\}$.
   ON fait l'étude de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$.
   $D_f = \mathbb{R}$, f est continue et dérivable (quotient et somme de fonctions continues et dérivables). $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+4) - 2xx^2}{(x^2+4)^2} = \dfrac{8x}{(x^2+4)^2}$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.
   Ainsi $inf(C) = -1$ et $sup(C) = 1$ (me demander pour une justification rigoureuse).
   Néanmoins, $min(C)$ n'existe pas car alors il existerait x tel que $\dfrac{x^2}{x^2+4} = -1$ c'ést à dire $x^2 = -x^2 - 4$ c'ést á dire $2x^2 = -4$ ce qui est impossible.
   De même , $max(C)$ n'existe pas car alors il existerait x tel que $\dfrac{x^2}{x^2+4} = 1$ c'ést à dire $x^2 = x^2 + 4$ c'ést á dire $0 = 4$ ce qui est impossible.

Remarque 5.8. On a $sup[a,b] = sup]a,b[= sup]a,b] = sup[a,b[= b$, ainsi que : $inf[a,b] = inf]a,b[= inf]a,b] = inf[a,b[= b$
De plus, si le maximum existe alors il correspond à la borne supérieur, et si le minimum existe alors il correspond à la borne inférieur.

Théorème 5.9. *(admis)*
Toutes parties non vide et majorée admet une borne supérieure.
Toutes parties non vide et minorée admet une borne inférieure.

Exemple 5.10. Montrons que si $A \subset B$, A est non vide et que B est majorée alors A et B admettent une borne sup et $sup(A) \leqslant sup(B)$.

Supposons que $A \subset B$ et que B est majorée alors B est non vide, et donc par le th. ci-dessus, B admet une borne sup.
De plus, comme $A \subset B$ et B est majorée alors A est majorée aussi, en effet pour tout $x \in A$, $x \in B$ et donc $x \leqslant sup(B)$.
De plus, on prouve ainsi que $sup(B)$ est un majorant de A et donc $sup(A) \leqslant sup(B)$

Exemple 5.11. difficile On considère une fonction f croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrons que f admet un point fixe.
On regardera $A = \{x \in [0,1] | f(x) > x\}$ et on distinguera la cas où A est vide.

Supposons que A soit vide alors pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant x$ et donc $f(0) \leqslant 0$ et donc $f(0) = 0$ car $f(x) \in [0,1]$ pour tout $x \in [0,1]$.
Supposons maintenant que A soit non vide, comme A est majorée par 1 alors par le th précédent, A admet une borne supérieure notée x_0.
Montrons que $f(x_0) = x_0$:
Comme pour tout $x \in A$, $x \leqslant x_0$ alors $f(x) \leqslant f(x_0)$ et comme $x \in A$ alors $x < f(x_0)$ et donc $f(x_0)$ est un majorant de A : ainsi $f(x_0) \geqslant x_0$.
De plus, par croissance, $f(f(x_0)) \geqslant f(x_0)$: ainsi soit $f(f(x_0)) = f(x_0)$ et dans ce cas $f(x_0)$ est le point fixe, sinon $f(f(x_0)) > f(x_0)$ et donc $f(x_0) \in A$ et donc $f(x_0) \leqslant x_0$. Ainsi $f(x_0) = x_0$.

6 La partie entière

Théorème 6.1. *(admis)*
Toutes parties non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.

Perspective 6.2. On considère une suite d'**entiers naturels** décroissantes. Soit $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. Alors A est un partie non vide d $\mathbb{N}$, elle admet donc un minimum u_{n_0}. Or par décroissance de la suite, $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant u_{n_0}$ et comme u_{n_0} est le minimum alors $u_{n_0} = u_n \forall n \geqslant n_0$.
C'est le principe de la descente infini : si pour des entiers naturels dans un ensemble, on réussit à construire un procédé qui donne à chaque fois un entier strictement plus petit dans cet ensemble (on peut donc itéré cette 'descente' une infinité de fois) alors il y a absurdité (au vu de ce qui est dit ci dessus).
Par exemple : supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel.
Ainsi, il est existe $p, q \in \mathbb{N}$ ($q \neq 0$) tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. On a donc $p^2 = 2q^2$ et donc p^2 est pair, et ainsi p est pair (prouvez le). On pose $p_1 = \dfrac{p}{2}$ qui est donc entier et on a $q^2 = 2p_1^2$ et donc q^2 est pair et donc q aussi, on pose donc $q_1 = \dfrac{q}{2}$.
• Ainsi $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} = \dfrac{p_1}{q_1}$ avec $p_1 < p$ et $q_1 < q$. On peut donc construire 2 suites d'entiers naturels tels que $p > p_1 > p_2$.... et $q > q_1 > \ldots$: c'est absurde. Ainsi $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Définition 6.3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la partie entière de x, noté $\lfloor x \rfloor$ par l'unique entier relatif n tel que

$$n \leqslant x < n+1$$

Démonstration. On admettra la propréte suivante : $\mathbb{R}$ est Archimédien, c'est à dire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$
Cette démontrastion est en deux parties :
- Existence de la partie entière de x :
  On considère $A = \{k \in \mathbb{N} | k > x\}$. A est non vide (cf "$\mathbb{R}$ est archimédien") et A est minorée par x et donc $imin(A)$ existe et on le note m.
  On pose $n = m-1$, et $n \leqslant x < n+1$ c'est à dire $m-1 \leqslant x < m$: en effet, si $x > m-1$ alors $m-1 \in A$ et donc m ne serait pas le minimum de A. De plus, $m \in A$, donc $x < m$.
- Unicité de la partie entière de x :
  Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ et $n \leqslant x < n+1$ et $m \leqslant x < m+1$:
  alors $n - m \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant x < n+1$, $-m-1 < x \leqslant -m$, donc $n-m-1 < 0 < n+1-m$ et donc $-1 < m-n < 1$ et donc $m - n = 0$ et donc $m = n$.

□

Exemple 6.4. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lfloor n \rfloor = n$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & si \quad nest paire \\ \frac{n-1}{2} & si \quad nest paire \end{cases}$.

2. Résoudre $2 \times \lfloor \frac{x}{2} \rfloor = x \Leftrightarrow \lfloor \frac{x}{2} \rfloor = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2}$ est un entier c'est à dire x est un entier pair.
   $\lfloor x^2 - 2x \rfloor = 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant x^2 - 2x < 2$:
   La résolution de ces inéquations est simple :
   $(E) \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 - 2x - 1$: $\Delta = 4 + 4 = 8$ et donc $(E) \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; +\infty[$.
   $(F) \Leftrightarrow 0 \geqslant x^2 - 2x - 2$: $\Delta = 4 + 8 = 12$ et donc $(F) \Leftrightarrow x \in [1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}]$.
   Ainsi l'ensemble de solution de l'équation est $[1 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{3}]$.
3. Est ce que $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$? Non : un CE est avec $x = 1.6$ et $y = 1.7$.
4. Montrer que la fonction $t \mapsto t - \lfloor t \rfloor$ est 1-périodique.
   Soit $t \in \mathbb{R}$, $t + 1 - \lfloor t + 1 \rfloor = t - \lfloor t \rfloor$ car $\lfloor t + 1 \rfloor = \lfloor t \rfloor + 1$. En effet, $\lfloor t \rfloor + 1$ est un entier et $\lfloor t \rfloor + 1 \leqslant t + 1 < \lfloor t \rfloor + 1 + 1$ car $\lfloor t \rfloor \leqslant t < \lfloor t \rfloor + 1$.
5. Donner le graphe de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}$.
   Non fait ici mais simple.