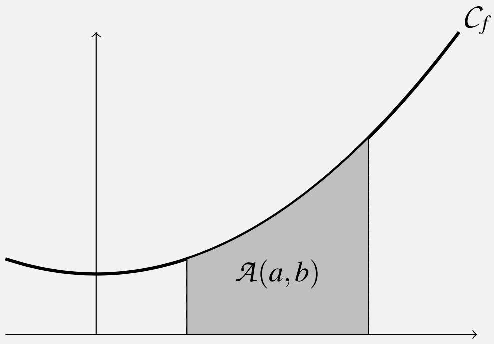
Chapitre 20 : Intégration sur un segment

1 Aire sous la courbe

Pour cette partie, f désigne une fonction continue sur un segment $[a,b]$ (avec $a \leqslant b$).

Intégrale d'une fonction positive

Définition 1.1. Soit f une fonction positive. On appelle *intégrale de f entre a et b* notée $\int_a^b f(t)dt$ l'aire de la partie des points (x,y) du plan vérifiant $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

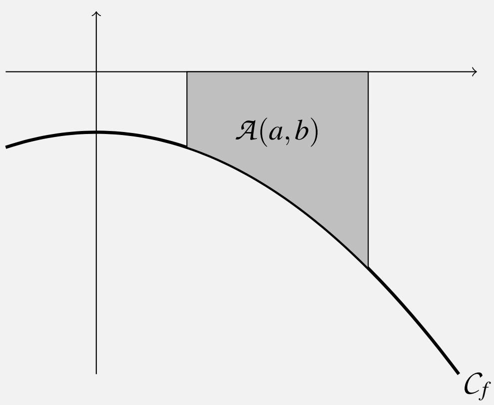


Exemple 1.2.

- Pour une fonction constante égale à $c \geqslant 0$, on a toujours $\int_a^b cdt = c(b-a)$.
- Pour une fonction affine $f : x \mapsto mx+p$, si elle est positive sur $[a,b]$, on a toujours $\int_a^b f(t)dt = (b-a)\left(m\frac{a+b}{2}+p\right)$.
- Pour la fonction partie entière, on a pour tout entier n positif $\int_a^b f(t)dt = \frac{n(n-1)}{2}$.

Intégrale d'une fonction négative

Définition 1.3. Si f est une fonction négative, On appelle *intégrale de f entre a et b* notée $\int_a^b f(t)dt$ l'opposée de l'aire de la partie des points (x,y) du plan vérifiant $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.



Exemple 1.4.

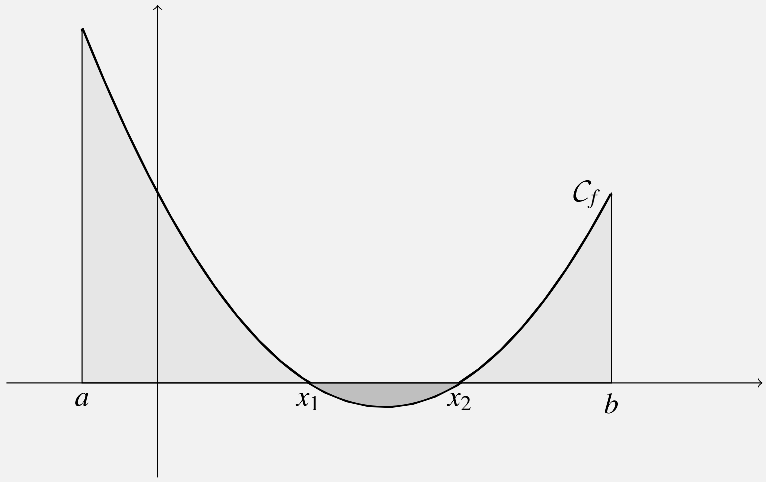
- Pour une fonction constante égale à $c \leqslant 0$, on a toujours $\int_a^b cdt = c(b-a)$.
- Pour une fonction affine $f : x \mapsto mx+p$, si elle est négative sur $[a,b]$, on a toujours $\int_a^b f(t)dt = (b-a)\left(m\frac{a+b}{2}+p\right)$.

Remarque 1.5. Si une aire *géométrique* est toujours positive, on parle d'*aire algébrique* lorsqu'on la compte négativement pour les fonctions négatives.

Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Définition 1.6. Si f est une fonction présentant un nombre fini de changement de signe en $x_1, ..., x_n$ (on pose $a = x_0, b = x_{n+1}$, on appelle *intégrale de f entre a et b* la somme des intégrales de f pour chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ où f est de signe constant, soit

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt.}$$



Exemple 1.7. Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par $f(x) = x+1$ pour $x \geqslant 1$ et $f(x) = -1$ pour $x > 1$. Calculer l'aire sous sa courbe.

1.1 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$

Proposition 1.8. *Soit I un intervalle. $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall(a,b,c) \in I^3$, $\forall(f,g) \in C^0(I,\mathbb{R})^2$, on a :*

- *Linéarité :* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$
- *Relation de Chasles :* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$
- *Positivité : si f est positive sur $[a,b]$ **avec** $\underline{a \leq b}$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0.$
- *Croissance : si $f \leq g$ sur $[a,b]$ **avec** $\underline{a \leq b}$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$

Démonstration. On admettra les 3 premiers mais on démontrera le dernier :
Soit f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$ ($a \leqslant b$) telles que $f \leqslant g$.
Ainsi $g - f$ est fonction définie sur $[a,b]$ et est négative, ainsi $\displaystyle\int_a^b g(t) - f(t)\,dt \geqslant 0$, ainsi $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$ et donc $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$. □

Remarque 1.9.

1. La propriété de Chasles est valable quel que soit l'ordre des réels a, b et c. Rappelons au passage que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$
2. La propriété de positivité est seulement une implication, la réciproque est bien entendu fausse ! (et de même pour la croissance...) Illustrons cette remarque par un contre-exemple :

   Soit $f : x \mapsto x$ définie sur $[-1,2]$ alors $\displaystyle\int_{-1}^2 x\,dx = [\frac{x^2}{2}]_{-1}^2 = \frac{3}{2} \geqslant 0$ alors que f n'est pas positive sur $[-1,2]$.

Corollaire 1.10. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ (avec $a \leq b$). Alors* $\boxed{\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt}$

Démonstration. On pose $f_+ : x \mapsto \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \geqslant 0 \\ 0 & si \quad f(x) \leqslant 0 \end{cases}$ et $f_- : x \mapsto \begin{cases} 0 & si \quad f(x) \geqslant 0 \\ f(x) & si \quad f(x) \leqslant 0 \end{cases}$
Alors $f = f_+ + f_-$ et $|f| = f_+ - f_-$
On admet que f_+ et f_- sont des fonctions continues (laisser au lecteur)
Ainsi $\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \left|\int_a^b f_+(t) + f_-(t)dt\right| = \left|\int_a^b f_+(t)dt + \int_a^b f_-(t)dt\right| \leqslant \left|\int_a^b f_+(t)dt\right| + \left|\int_a^b f_-(t)dt\right| = \int_a^b f_+(t)dt - \int_a^b f_-(t)dt = \int_a^b f_+(t) - f_-(t)dt = \int_a^b |f(t)|dt$ □

1.2 Propriété de stricte positivité

Attention à l'hypothèse de continuité, indispensable dans les deux énoncés de ce dernier paragraphe :

Proposition 1.11. *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ avec $a < b$. On a l'implication :*

$$\begin{cases} f \;\; \textit{est positive sur} \;\; [a,b] \\ \textit{il existe} \;\; x_0 \in [a,b] \;\; \textit{tel que} \;\; f(x_0) > 0 \\ f \;\; \textit{est continue sur} \;\; [a,b] \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(t)dt > 0$$

La preuve est faite en dessous.

Illustration et exemple qui montre que la continuité est indispensable pour cette implication :

Proposition 1.12. *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ avec $a < b$. On a l'implication :*

$$\begin{cases} f \;\; \textit{est positive sur} \;\; [a,b] \\ \int_a^b f(t)dt = 0 \\ f \;\; \textit{est continue sur} \;\; [a,b] \end{cases} \Rightarrow \forall t \in [a,b], f(t) = 0$$

Démonstration. On remarque si l'on sait prouver la proposition 1.12 alors on peut prouver la proposition 1.11.
En effet, soit f une fonction positive sur $[a,b]$, continue sur $[a,b]$ tel qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$.
On sait alors que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$. Supposons par l'absurde que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ alors par la prop 1.12 $\forall t \in [a,b]$, $f(t) = 0$ ce qui est absurde. Et donc $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Prouvons alors la proposition 1.12 :
Soit f une fonction positive sur $[a,b]$ tel que f continue sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$ ainsi $f(x_0) > 0$
Ainsi il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est supérieur à $\frac{f(x_0)}{2}$ (par continuité de f) :
En effet, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$ donc :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$, $f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$
Avec $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$, $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2} > 0$.

Mais alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{x_0-\alpha} f(t)\,dt + \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)\,dt + \int_{x_0+\alpha}^{b} f(t)\,dt > 0$

Car $\int_a^{x_0-\alpha} f(t)\,dt \geqslant 0$ et $\int_{x_0+\alpha}^{b} f(t)\,dt \geqslant 0$ et $\int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)\,dt \geqslant 2\alpha\dfrac{f(x_0)}{2} > 0$

□

Théorème 1.13. *Si f est continue sur $[a,b]$, alors*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}$$

Démonstration. Nous ne ferons cette démonstration que dans le cas où $f \in C^1([a,b])$.
Montrons par exemple la première inégalité.
Notons $x_k = a+k\dfrac{b-a}{n}$ pour tout $k \in [[1,n]]$.
Ainsi $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
Étudions :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right|$$

Mais $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\,dt = f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)(x_{k+1}-x_k) = f(x_k)\frac{b-a}{n}$, ainsi :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,dt\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)-f(x_k)\,dt\right|$$

Ainsi par les inégalités triangulaires,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)-f(x_k)|\,dt$$

Comme $f \in C^1([a,b])$, et comme $f' \in C^0([a,b])$ alors f' est bornée donc $\forall x \in [a,b]$, $|f'(x)| \leqslant M$ avec $M \in \mathbb{R}$, alors pour tout $k \in [[0,n-1]]$ et pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$, on peut appliquer l'IAF sur f entre les réels x_k et t ainsi :
$|f(t)-f(x_k)| \leqslant M|t-x_k| \leqslant M(x_{k+1}-x_k) = M\dfrac{b-a}{n}$
Ainsi :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} M\frac{b-a}{n}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} M\frac{(b-a)^2}{n^2} = M\frac{(b-a)^2}{n} \to 0$$

Ainsi $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \to \int_a^b f(t)\,dt$

□

Ce résultat fournit un moyen de calculer une **valeur approchée** de $\int_a^b f(t)dt$ (**méthode dite des rectangles**).

On l'utilise aussi pour déterminer la limite de certaines suites, souvent dans le cas particulier où $[a,b] = [0,1]$: on a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$.

Exemple 1.14. Déterminons la limite des suites suivantes :
$\displaystyle\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\displaystyle\left(\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Comme $f : x \mapsto x^3$ est continue sur $[0,1]$ alors par le th. précédent, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 \to \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$.

Comme $f : x \mapsto sin(x)$ est continue sur $[0,\pi/2]$ alors par le th. précédent, $\displaystyle\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \to \int_0^{\pi/2} sin(x)\,dx = [-cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$.

Comme $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$ alors par le th. précédent, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = ln(2)$.

2 Primitives et intégrales

2.1 Primitives d'une fonction sur un intervalle

Primitive d'une fonction

Définition 2.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 2.2. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto 3+4x^2$ sur $I = \mathbb{R}$, puis une autre.
La fonction $G : x \mapsto 3x + \frac{4}{3}x^3$ a pour fonction dérivée $x \mapsto 3+4x^2$, alors G en est une primitive.
De même pour $x \mapsto 3x + \frac{4}{3}x^3 + 2$

Remarque 2.3. Il faut être prudent sur l'ensemble de définition ici. En effet, $x \mapsto ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est insuffisant car ce n'est le cas que sur $\mathbb{R}_+^*$: sur $\mathbb{R}_+^*$ on a que $x \mapsto ln(-x)$ en est une (en effet $(ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ et est bien définie sur $\mathbb{R}_-^*$).
Au final : $x \mapsto ln(|x|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Théorème 2.4. *Si f admet une primitive F sur <u>un intervalle I</u>, alors f admet une infinité de primitives sur I et G est une primitive de f sur I si et seulement s'il existe un réel k tel que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$.*
(autrement dit, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante)

Démonstration. Montrons en premier lieu que si F est une primitive de f alors, pour tout $k \in \mathbb{R}$ $F+k$ est une primitive de f :
En effet, $(F+k)' = F' = f$.
Ainsi f possède alors une infinité de primitive.
Montrons alors que si G est une primitive de f alors $G = F+k$, avec $k \in \mathbb{R}$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc $G - F$ est constant et donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G - F = k$ c'est à dire $G = F + k$. $\square$

Remarque 2.5. On parle donc d'**une** primitive de f.

Exemple 2.6. Donner toutes les primitives de la fonction $(x \mapsto \frac{1}{x})$ sur $I =]0, +\infty[$. Parmi ces primitives, quelle est celle qui s'annule en e ?

Comme $x \mapsto ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0 : +\infty[$ alors l'ensemble des primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto ln(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Comme $ln(e) + k = 0$ si et seulement si $k = -1$ alors $x \mapsto ln(x) - 1$ est la seule primitive qui s'annule en e.

Un exemple de fonction définie sur un intervalle mais n'admettant pas de primitive sur cet intervalle :
Soit f la fonction définie sur $I = [0,2]$ par $f(x) = 0$ pour tout $x \in I \setminus \{1\}$ et $f(1) = 5$. Montrer en raisonnant par l'absurde que f n'admet pas de primitive sur I.
Supposons qu'il existe une fonction F définie sur $[0,2]$ dérivable tel que $F' = f$.
Ainsi sur $[0,1[$, $F' = f = 0$ et donc F est constant, disons $\forall x \in [0,1[$, $F(x) = c$.
Et sur $]1,2]$, $F' = f = 0$ et donc F est constant, disons $\forall x \in]1,2]$, $F(x) = d$.
Mais comme F est dérivable en 1 alors F est continue en 1 et du coup $\lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1^-} F(x) = F(1)$ et donc $c = d = F(1)$.
Ainsi F est constante sur $[0,2]$ et donc $F' = f = 0$ sur $[0,2]$ ce qui est absurde !

2.2 Théorème fondamental : primitives d'une fonction continue sur un intervalle I

Ce résultat fondamental trouve son application dans toute la suite de ce cours.

Théorème 2.7. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. L'application $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I, et $\forall x \in I$, $G'(x) = f(x)$. La fonction : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ donne l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.*

Démonstration. Cette propriété, fondamentale, est admise mais découle du calcul de la limite de $f(x_0) - \dfrac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x_0+h-x_0}$ quand h tend vers 0. □

2.3 Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$

Proposition 2.8. *Soit f une fonction* **continue** *sur un* **intervalle** *I et F une primitive de f sur I. Pour tout couple $(a,b) \in I^2$, le réel $F(b)-F(a)$ ne dépend pas de la primitive F choisie.*

De plus $\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)}$ *où F est une primitive de f.*

Démonstration. Soit F et G deux primitives de f. Alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F = G+k$ et donc $F(b)-F(a) = G(b)+k-G(a)-k = G(b)-G(a)$.
Ainsi cette quantité ne dépend pas de la primitive choisi.
Ensuite $H : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f par 2.7 et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = H(b)-H(a) = F(b)-F(a)$ pour toute primitive F de f (car $H(a)=0$ par 2.7). □

Exemple 2.9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = [arctan(u)]_0^1 = arctan(1) - arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.

Remarque 2.10. $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = F(a)-F(a) = 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a) = -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(t)dt$.

Exemple 2.11.

1. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $I = \mathbb{R}$.
   Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$, que l'on peut exprimer sous la forme : $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

   Exprimer la primitive de cette fonction sur $\mathbb{R}$ s'annulant en -1 :

   $\int_0^{-1} e^{-t^2}dt + C = 0 \Leftrightarrow C = -\int_0^{-1} e^{-t^2}dt$
   La primitive de cette fonction sur $\mathbb{R}$ s'annulant en -1 est $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt - \int_0^{-1} e^{-t^2}dt = \int_{-1}^x e^{-t^2}dt$.

2. On considère la fonction $F : x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\cos(t)}dt$.
   Pourquoi peut-on dire que cette fonction est définie, continue, dérivable et même de dérivée continue (on dit alors de classe C^1) sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$?
   Comme, pour tout $x \in]-\pi/2;\pi/2[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{cos(t)}$ est continue sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$), car continue sur $]-\pi/2;\pi/2[$ alors F est bien définie. De plus c'est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{cos(t)}$ donc est dérivable sur $]-\pi/2,\pi/2[$ et de dérivée $t \mapsto \dfrac{1}{cos(t)}$ qui est continue sur $]-\pi/2,\pi/2[$ donc cette fonction est $C^1(]-\pi/2;\pi/2[)$.

Exemple 2.12.

1. Soit F la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Montrer que F est définie et dérivable sur $I =]-1,1[$. Calculer $F'(x)$ et en déduire le sens de variation de F.

   Soit $x \in]-1,1[$ alors la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,x]$ donc $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in]-1,1[$.
   De plus F est une primitive de f sur $]-1,1[$ donc F est dérivable sur $]-1,1[$ et de plus, pour tout $x \in]-1,1[$, $F'(x) = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$.
   Ainsi la fonction F est strictement croissante sur $]-1,1[$.

2. Soit $G : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-\sqrt{t}} dt$. Montrer que G est définie et dérivable sur $I = [0, +\infty[$. Calculer $G'(x)$.

Notons $F : x \mapsto \int_0^x e^{-\sqrt{t}} dt$, et remarquons qu'il s'agit d'une primitive de $f : x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$ car $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$.
Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $G(x) = \int_0^{2x} e^{-\sqrt{t}} dt - \int_0^x e^{-\sqrt{t}} dt = F(2x) - F(x)$ donc est bien définie et dérivable par somme/composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2e^{-\sqrt{2x}} - e^{-\sqrt{x}}$.
On remarque qu'un raisonnement identique aurait pu être mené en notant F une primitive quelconque de f.

Remarque 2.13. Si f est $C^1(I)$, on a donc pour tout $x, a \in I$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$

Remarque 2.14. (méthode pour encadrer une intégrale) Pour encadrer une intégrale, on commence souvent par intégrer une intégrale par un ou deux membres dont on peut trouver une primitive :
Par exemple : encadrer puis donner la limite de $I_n = \int_0^1 ln(1+t)^n\, dt$
On remarque que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant ln(1+t) \leqslant ln(2)$ et donc par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant ln(1+t)^n \leqslant ln(2)^n$
Ainsi $\int_0^1 0\, dt \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 ln(2)^n dt$ et donc $0 \leqslant I_n \leqslant ln(2)^n$.
Or $ln(2) \in]-1,1[$ donc $ln(2)^n \to 0$ et donc par le TDG, $I_n \to 0$.

Faire de même pour $J_n = \int_0^{\pi/3} sin(t)^n\, dt$ et $K_n = \int_0^1 e^{-tn} cos(t/n)\, dt$.

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0; \pi/3]$, $0 \leqslant sin(t) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ (croissance de la fonction sin) et donc par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant sin(t)^n \leqslant (\frac{\sqrt{3}}{2})^n$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \int_0^{\pi/3} sin(t)^n dt \leqslant \int_0^{\pi/3} (\frac{\sqrt{3}}{2})^n dt = (\frac{\sqrt{3}}{2})^n \frac{\pi}{3}$
Or $\frac{\sqrt{3}}{2} \in]-1,1[$ donc $(\frac{\sqrt{3}}{2})^n \frac{\pi}{3} \to 0$ et donc par le TDG, $J_n \to 0$.

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0;1]$, $0 \leqslant e^{-tn} cos(t/n) \leqslant e^{-t/n}$ (car $t/n \in [0, \pi/2]$ Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \int_0^1 e^{-tn} cos(t/n)\, dt \leqslant \int_0^1 e^{-tn} dt = \frac{e^{-n} - 1}{-n} \to 0$
Donc par le TDG, $K_n \to 0$.

Remarque 2.15. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, on a

$$\min_{x \in [a,b]} f(x)(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \max_{x \in [a,b]} f(x)(b-a)$$

3 Calculs de primitives et d'intégrales

3.1 Tableaux des primitives usuelles

Ces formules sont valables sur les intervalles où f est continue et K désigne une constante. On suppose de plus que $u \in C^1$. On supposera les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions cohérents avec les formules.

$f(x)$	Primitives de f
a	$ax+K$
$x^{\alpha}, \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+K$
$\dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$	$\ln(x)+K$
e^x	e^x+K
$\sin(x)$	$-\cos(x)+K$
$\cos(x)$	$\sin(x)+K$
$1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)+K$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)+K$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}+K$
$u'(x)\,(u(x))^{\alpha}, \alpha \neq -1$	$\dfrac{1}{\alpha+1}\,(u(x))^{\alpha+1}+K$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert+K$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))+K$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))+K$
$u'(x)f(u(x))$	$F(x)+K$

Dans le cas où F est une primtive de f. Enfin on rappelle que si F est une primitive de f sur I et G celle de g alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ (on peut étendre ce résultat à une somme à n fonctions, $\forall n \in \mathbb{N}$). De plus si $k \in \mathbb{R}$, alors kF est une primitive de kf.

Exemple 3.1. Dire si les fonctions suivantes relèvent des règles ci-dessus pour en déterminer une primitive, si oui préciser la formule à utiliser :

$x \mapsto \exp(3x)$ a pour primitive $x \mapsto \dfrac{e^{3x}}{3}$.

$x \mapsto \exp(x^2)$: pas d'utilisation à première vue des formules ci-dessus.

$x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+1}$ a pour primitive $x \mapsto \dfrac{1}{2}ln|x^2+1| = \dfrac{1}{2}ln(x^2+1)$

$x \mapsto (x+4)^{2018} = 1(x+4)^{2018}$ a pour primitive $x \mapsto \dfrac{(x+4)^{2019}}{2019}$

$x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$: pas d'utilisation à première vue des formules ci-dessus.

$x \mapsto x\sqrt{x^2-1} = \dfrac{1}{2}2x(x^2-1)^{1/2}$ a pour primitive $x \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}(x^2-1)^{3/2} = \dfrac{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}{3}$.

Remarque 3.2. (première méthode pour les intégrales) Avant tout, il faut vérifier que l'intégrale est bien définie : la fonction est elle continue sur $[a,b]$?

On commence par réduire l'intégrande de manière à voir apparaître des termes facile à "primitiver". Même si cela n'est pas exhaustif, on pourra penser à la décomposition en éléments simples des fractions, où à l'usage des formules de trigonométries pour ramener les expressions à des sommes de $cos(ax)$ et $sin(bx)$.

Pour des exemples, voir la fin de la fiche exercices.

Sinon, on peut essayer d'appliquer les formules de l'intégration par parties ou du changement de variables.

3.2 Intégration par parties

Théorème 3.3. *Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur I, a et b deux éléments de I. Alors on a l'égalité :*

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt}$$

Démonstration. Comme les fonctions u et v sont $C^1([a,b])$ alors toutes les intégrales ci-dessous sont bien définies : $[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b (u(t)v(t))'\,dt = \int_a^b u'(t)v(t)+u(t)v'(t)\,dt = \int_a^b u'(t)v(t)\,dt + \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$ d'où la formule. □

Remarque 3.4. (la rédaction) Calculons $\int_0^\pi tcos(t)\,dt$:
On pose, pour tout $t\in[0;\pi]$, $u(t)=t$ et donc $u'(t)=1$ et $v(t)=sin(t)$ et donc $v'(t)=cos(t)$. $u,v\in C^1([0,\pi])$ alors par l'I.P.P. :

$$\int_0^\pi tcos(t)\,dt = [tsin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi sin(t)\,dt = -[-cos(t)]_0^\pi = -1-1=-2$$

Exemple 3.5.

1. Calculer $\int_1^e \ln(x)dx$

   On pose, pour tout $x\in[1;e]$, $u(x)=ln(x)$ et donc $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=x$ et donc $v'(x)=1$. $u,v\in C^1([1,e])$ alors par l'I.P.P. :

$$\int_1^e ln(x)\,dx = [xln(x)]_1^e - \int_1^e 1\,dx = eln(e)-(e-1)=1$$

2. L'intégration par parties est très utile pour obtenir une relation de récurrence pour une suite d'intégrales : soit $I_n(x)=\int_0^x t^n e^{-t}dt$ pour $x\in\mathbb{R}^+$.

   (a) Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$ (pour $n\in\mathbb{N}^*$) :
   Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soit $x\in\mathbb{R}_+$, on pose : pour tout $t\in[0,x]$, $u(t)=t^n$ et donc $u'(t)=nt^{n-1}$ et $v(t)=-e^{-t}$ et donc $u'(t)=e^{-t}$. $u,v\in C^1([0,x])$ et donc par l'IPP :

$$I_n(x)=\int_0^x t^n e^{-t}\,dt = [-t^ne^{-t}]_0^x + n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}\,dt = -x^ne^{-x}+nI_{n-1}(x)$$

   (b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n(x)=n!\left[1-e^{-x}\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right]$.
   Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On le montre par récurrence :
   I : $n=0$ Trivial car $I_0=\int_0^x e^{-t}\,dt = 1-e^{-x}$
   H : soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que la propriété est vraie au rang n et montrons la au rang $n+1$:
   $I_{n+1}(x) = -x^{n+1}e^{-x}+(n+1)I_n(x) = -\dfrac{x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!}(n+1)!+(n+1)!\left[1-e^{-x}\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}\right] = (n+1)!\left[1-e^{-x}\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}-x^{n+1}\right] = (n+1)!\left[1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}\right]$
   Conclusion : Par le principe de récurrence, ...

   On constate alors que, pour tout $x>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\dfrac{I_n(x)}{n!}=\left[1-e^{-x}\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}\right]$
   Or $0\leqslant \dfrac{I_n(x)}{n!}\leqslant \int_0^x e^{-t}\,dt\dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{x^n}{n!}(1-e^{-x})\to 0$ par C.C.
   Ainsi $e^{-x}\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}\to 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}=e^x$.

Remarque 3.6. On retiendra la méthode ALPES

3.3 Changement de variable

Théorème 3.7. *Soit ϕ une fonction de classe C^1 sur un intervalle I. Soit f continue sur $J = u(I)$.*
$\forall(\alpha,\beta) \in I^2$, $\boxed{\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\phi'(x)dx}$.

Démonstration. Comme f est continue sur $J = \phi(I)$ alors $f \circ \phi \times \phi' \in C^0(I)$ donc les intégrales ci dessous seront bien définies. On note F une primitive de f :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (F\circ\phi)'(x)dx = [F\circ\phi(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,dt$$

□

Remarque 3.8. (la rédaction) Calculons $\int_0^1 \frac{e^t-1}{e^t+1}dt$ et $\int_1^2 e^{\sqrt{t}}\,dt$.
On retient 5 temps : on pose la fonction $\phi \in C^1$ voulue, on fait "apparaître" le ϕ', on remplace les "ϕ", on calcule l'image des bornes par ϕ puis on applique la formule.
Pour la première, on pose $\phi(t) = e^t$, pour tout $t \in [0,1]$. $\phi \in C^1([0,1])$.
$\forall t \in [0,1]$, $\frac{e^t-1}{e^t+1} = \frac{e^t-1}{e^t+1}\frac{e^t}{e^t} = \frac{\phi(t)-1}{\phi^2(t)+\phi(t)}\phi'(t)$ et comme $\phi(0) = 1$ et $\phi(1) = e$ alors :

$$\int_0^1 \frac{e^t-1}{e^t+1}dt = \int_1^e \frac{u-1}{u^2+u}du$$

Or $\frac{u-1}{u^2+u} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1} \Leftrightarrow \frac{u-1}{u^2+u} = \frac{u(a+b)+a}{u^2+u}$
Ainsi on cherche $a,b \in \mathbb{R}$ tel que $a = -1$ et $a+b = 1$ donc $b = 2$.
Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{e^t-1}{e^t+1}dt = \int_1^e \frac{u-1}{u^2+u}du = \int_1^e \frac{-1}{u} + \frac{2}{u+1}du = [-ln|u| + 2ln|u+1|]_1^e = 2ln(e+1) - 1 - 2ln(2)$$

Pour le second, on pose $\phi(t) = \sqrt{t}$, pour tout $t \in [1,2]$. $\phi \in C^1([1,2])$.
$\forall t \in [1,2]$, $e^{\sqrt{t}} = e^{\sqrt{t}}\frac{2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} = e^{\phi(t)}2\phi(t)\phi'(t)$ et comme $\phi(1) = 1$ et $\phi(2) = \sqrt{2}$ alors :

$$\int_1^2 e^{\sqrt{t}}dt = \int_1^{\sqrt{2}} 2xe^x\,du$$

On pose en suite pour tout $x \in [1,\sqrt{2}]$, $u(x) = x$ et donc $u'(x) = 1$, et $v(x) = e^x$ et donc $v(x) = e^x$. $u,v \in C^1([1,\sqrt{2}])$.

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2xe^x\,du = [xe^x]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} e^x\,dx = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}} - e - e^{\sqrt{2}} + e = (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}$$

Remarque 3.9. Attention, au programme, seuls les changements de variables strictement monotones sont autorisés, pour mieux correspondre au cas des intégrales impropres. Ainsi nous signalerons la strict monotonie à chaque fois.

Exemple 3.10.

1. Calculer $\int_0^4 \ln(2x+1)dx$ en posant $t = 2x+1$.
   On pose $\phi(x) = 2x+1$, pour tout $x \in [0,4]$, $\phi \in C^1([0,4])$.
   Ainsi pour tout $x \in [0,4]$, $ln(2x+1) = ln(phi(x))\frac{\phi'(x)}{2}$ et donc, comme $\phi(0) = 1$ et $\phi(1) = 3$.
   $$\int_0^4 \ln(2x+1)dx = \int_1^3 \frac{ln(u)}{2}du = [\frac{uln(u)-u}{2}]_1^3 = \frac{3ln(3)-2}{2}$$
2. Montrer que $\int_1^2 \frac{1}{x(x^3+1)}dx = \int_1^8 \frac{1}{3t(t+1)}dt$ en posant $t = x^3$.
   On pose $\phi(x) = x^3$, pour tout $x \in [1,2]$, $\phi \in C^1([1,2])$.
   Ainsi pour tout $x \in [0,4]$, $\frac{1}{x(x^3+1)} = \frac{1}{x(x^3+1)}\frac{3x^2}{3x^2} = \frac{1}{3x^3(x^3+1)}3x^2 = \frac{1}{3\phi(x)(\phi(x)+1)}3\phi(x)^2$ et donc, comme $\phi(1) = 1$ et $\phi(1) = 2$.
   $$\int_1^2 \frac{1}{x(x^3+1)}dx = \int_1^8 \frac{1}{3u(u+1)}du$$

3. Montrer que $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$ en posant $t = \sin(x)$.
   On remarque que le changement de variable proposée ne peux s'appliquer qu'à la seconde intégrale.
   On pose $\phi(x) = sin(x)$, pour tout $x \in [0;\pi/2]$, $\phi \in C^1([0,\pi/2])$.
   Ainsi pour tout $x \in [0;\pi/2]$, comme $cos(x) \geqslant 0$, $cos^2(x) = \sqrt{1-sin^2(x)}cos(x) = \sqrt{1-phi(x)^2}phi'(x)$ et donc, comme $\phi(0) = 0$ et $\phi(\pi/2) = 1$.

$$\int_0^{\pi/2} cos^2(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$$

Application du changement de variable dans une intégrale : (démonstrations à savoir refaire impérativement !)

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant $-a$ et a.
   Si f est paire sur I alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$; si f est impaire sur I alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. Alors, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Démonstration. 1) Supposons que la fonction f considérée est paire sur I et soit $a \in I$ tel que $-a \in I$.
Alors $\int_{-a}^{a} ft)\,dt = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt$.
On pose pour tout $t \in [-a,0]$, $\phi(t) = -t$ ($\phi \in C^1([-a,0])$ alors $f(t) = -f(-\phi(t))\phi'(t)$ et donc :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = -\int_a^0 f(-u)\,du = \int_0^a f(u)\,du$$

(par parité).
De même pour le cas impaire.
2)Soit f une fonction continue, T-périodique. Alors

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{a+T} f(t)\,dt$$

On pose pour tout $t \in [a,0]$ (ou $[0,a]$), $\phi(t) = t+T$ ($\phi \in C^1([a,0])$ alors $f(t) = f(t+T) = f(\phi(t))\phi'(t)$ et donc :

$$\int_a^0 f(t)\,dt = \int_{a+T}^{T} f(u)\,du = -\int_T^{a+T} f(u)\,du$$

d'où le résultat. ☐

Exercice 1. Déterminer la valeur des intégrales suivantes : $\int_{-1}^{1} x^{2017}(x^2+1)^{2018}dx$ et $\int_0^{4\pi} |\sin(x)|dx$
Comme $f : x \mapsto x^{2017}(x^2+1)^{2018}$ est impaire car pour tout $x \in [-1,1]$, $f(-x) = (-x)^{2017}((-x)^2+1)^{2018} = -x^{2017}(x^2+1)^{2018} = -f(x)$ et donc $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$
Comme pour tout $x \in [0;4\pi]$, $|sin(x+\pi)| = |-sin(x)| = |sin(x)|$ et donc la fonction $x \mapsto sin(x)$ est π-périodique donc :

$$\int_0^{4\pi} |sin(x)|\,dx = 4\int_0^{\pi} |sin(x)|\,dx = 4\int_0^{\pi} sin(x)\,dx = 4 \times 2 = 8$$

4 Extension aux fonctions continues par morceaux

Dans ces définitions, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Fonction continue par morceaux

Définition 4.1. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$. f est dite continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si f est continue sur $[a,b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet une limite à droite et à gauche finie.
Autrement dit : il existe une subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) telle que
— pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.
— pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, f admet une limite à droite et à gauche finie en x_k.
— f admet une limite finie à droite en a et à gauche en b.
On dit que la famille $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est une subdivision adaptée à f.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 4.2. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $\phi_k(x) = f(x)$ si $x \in]x_k, x_{k+1}[$, $\phi_k(x_k) = \lim\limits_{x \to x_k^+} f(x)$ et $\phi_k(x_{k+1}) = \lim\limits_{x \to x_{k+1}^-} f(x)$ (ϕ_k est ainsi le prolongement par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$ de la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$).
$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, ϕ_k est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$, son intégrale sur $[x_k, x_{k+1}]$ existe donc. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_k(t)dt$.

Illustration :

Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux :
Les propriétés de linéarité, de Chasles, positivité et croissance restent valables.

Exemple 4.3. $\displaystyle\int_{-2}^{2,5} \lfloor t \rfloor dt = \int_{-2}^{-1} -2\,dt + \int_{-1}^{0} -1\,dt + \int_{0}^{1} 0\,dt + \int_{1}^{2} 1\,dt + \int_{2}^{2.5} 2\,dt = -2 - 1 + 1 + 1 = -1.$