Chapitre 28 : intégrales impropres

1 Définitions

Définition 1.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
L'intégrale généralisée (ou impropre) de f sur $[a;b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,dt$.
Elle est dite convergence si $\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b avec $x < b$. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$$

Si cette limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, alors l'intégrale est dite divergente.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a;b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
L'intégrale généralisée (ou impropre) de f sur $]a;b]$ est notée $\int_a^b f(t)\,dt$.
Elle est dite convergence si $\int_x^b f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers a avec $a < x$. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,dt$$

Si cette limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, alors l'intégrale est dite divergente.

Exemple 1.2.

1. Les intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ et $\int_0^1 ln(t)\,dt$ sont convergentes (avec une impropreté respectivement en $+\infty$ et 0). En effet, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $t \mapsto ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ et : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = [\frac{-1}{t}]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 1$$
(donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1$) et :
$$\int_y^1 ln(t)\,dt = [tln(t) - t]_y^1 = -1 - yln(y) \underset{\to 0^+}{\to} -1$$
Par C.C. (donc $\int_0^1 ln(t)\,dt$ est convergente et $\int_0^1 ln(t)\,dt = -1$) (on a utilisé le fait que $(tln(t)-t)' = ln(t)$)
2. Les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} sin(t)\,dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ sont divergentes (avec une impropreté respectivement en $+\infty$ et 0). En effet, $t \mapsto sin(t)$ est continue sur $[0;+\infty[$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\int_0^x sin(t)\,dt = [-cos(t)]_0^x = 1 - cos(x)$$
qui n'a pas de limite quand $x \to +\infty$ (donc $\int_0^{+\infty} sin(t)\,dt$ est divergente) et :
$$\int_y^1 \frac{1}{t}\,dt = [ln(t)]_y^1 = ln(1) - ln(y) \underset{\to 0^+}{\to} -\infty$$

(donc $\int_0^1 \frac{1}{t}\, dt$ est divergence)

Exercice 1. Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes après avoir signalé leur impropreté :

$$I = \int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2} \quad et \quad K = \int_1^2 \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

I est impropre en 0 car $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0;4]$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_x^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^4 = 4 - \sqrt{x} \underset{x \to 0^+}{\to} 4$$

Et donc $\int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge et $\int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 4$

J est impropre en $+\infty$ car $t \mapsto \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt = [\frac{-1}{1+t^2}]_0^x = \frac{-1}{1+x^2} + 1 \underset{x \to 0^+}{\to} 1$$

Et donc $\int_0^{+\infty} \frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2}$ converge et $\int_0^{+\infty} \frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2} = 1$

K est impropre en 1 car $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1;2[$. De plus, pour tout $x \in]1;2[$,

$$\int_x^2 \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}} = [\sqrt{t^2-1}]_x^2 = \sqrt{3} - \sqrt{x^2-1} \underset{x \to 1^+}{\to} \sqrt{3}$$

Et donc $\int_1^2 \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}$ converge et $\int_1^2 \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}} = \sqrt{3}$

Remarque 1.3. Attention, contrairement aux cas des séries numériques, la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ n'implique pas $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$. Un contre exemple construit à l'aide d'un graphique sera donné en vidéo.

Définition 1.4. Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.
L'intégrale généralisée (ou impropre) de f sur $]a;b[$ est notée $\int_a^b f(t)\, dt$.
Elle est dite convergence si pour tout réel $c \in]a;b[$, les intégrales généralisés $\int_a^c f(t)\, dt$ et $\int_c^b f(t)\, dt$ convergent. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$$

Sinon l'intégrale est dite divergente.

Exemple 1.5. Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et donnons sa valeur :
Pour tout $A > 0$, $\int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = [arctan(x)]_0^A = arctan(A) \underset{A \to +\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$
Pour tout $B < 0$, $\int_B^0 \frac{dt}{1+t^2} = [arctan(x)]_B^0 = -arctan(B) \underset{B \to -\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$, donc $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$
Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et vaut $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} + \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \pi$
(un argument de parité aurait pû être utilisé pour la deuxième intégrale)

2 Propriétés générales

Dans toute cette partie, on considère f et g continue sur $[a,b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ (donc une impropreté en b pour l'intégrale).
Les propriétés données peuvent être étendues dans les autres cas sans difficulté
Les propriétés suivantes sont conséquences directes de leur équivalent montrer dans le chapitre intégrale sur un segment : seule la première sera démontrée

Proposition 2.1. *Soit $c \in [a,b[$. Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente, alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

Démonstration. Soit $c \in [a;b[$, pour tout $x \in [c;b[$,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt$$

par la relation de Chasles sur le segment $[a,x]$ (qui n'a donc pas d'impropreté hein) et donc, par convergence de $\int_a^b f(t)\,dt$, en faisant tendre x vers b^-, on trouve

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

□

Proposition 2.2. *Soit $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont convergentes, alors $\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\,dt$ est aussi convergente et :*

$$\int_a^b (\beta f(t) + \lambda g(t))\,dt = \beta \int_a^b f(t)\,dt + \lambda \int_a^b g(t)\,dt$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons que les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont convergentes.
Soit $x \in [a,b[$, alors $\int_a^x \beta f(t) + \lambda g(t)\,dt = \beta \int_a^x f(t)\,dt + \lambda \int_a^x g(t)\,dt \underset{x \to b}{\to} \beta \int_a^b f(t)\,dt + \lambda \int_a^b g(t)\,dt$ □

Remarque 2.3. Attention, la réciproque est fausse. Il faut vérifier la convergence de $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$. En effet, on peut donner l'exemple suivant :
$0 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{t}\,dt$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge, donc $0 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ n'a pas de sens ! ! ! ! !

Proposition 2.4. *Si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont convergentes alors :*

- *Si f est positive, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$*
- *Si $f \leqslant g$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$*
- *Si f est positive et que $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b[$.*

Démonstration. Ces résultats sont triviaux en passant par les "intégrales" partielles. □

Exemple 2.5. Comment effectuer une IPP pour une intégrale généralisée ?
On ne fait pas une IPP directement sur une intégrale généralisée, l'dée est de la ramener à un segment pour appliquer les théorèmes et ensuite de prendre la limite. Par exemple :
Calculons l'intégrale $\int_1^{+\infty} te^{-t}\,dt$ après avoir justifier sa convergence :
Soit $A \in]1;+\infty[$.
On calcule cette intégrale grâce à une IPP. On considère les 2 fonctions de classe C^1 définie pour tout $x \geqslant 1$ par :
$u(x) = x$ et donc $u'(x) = 1$
$v'(x) = e^{-x}$ et donc $v(x) = -e^{-x}$
Ainsi

$$\int_1^A xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_1^A - \int_1^A -e^{-x}\,dx = -Ae^{-A} + e^{-1} + (-e^{-A} + e^{-1}) = 2e^{-1} - (1+A)e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\to} \frac{2}{e}$$

(par CC) Ainsi $\int_1^{+\infty} te^{-t}\,dt$ converge et $\int_1^{+\infty} te^{-t}\,dt = \frac{2}{e}$

Théorème 2.6. *Si f est une fonction continue sur $]a,b[$ et si ϕ est une bijection de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$, croissante ou décroissante et de classe C^1, alors les intégrales $\int_a^b f(u)\,du$ et $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$ sont de même nature et en cas de convergence sont égales (opposées dans le cas décroissant)*

Démonstration. Nous traiterons que le cas suivant, les autres cas sont similaires : Soit f est une fonction continue sur $[a,b[$ et si ϕ est une bijection de $[\alpha,\beta[$ sur $[a,b[$, croissante et de classe C^1.
Soit $y \in [a,b[$ et $x \in [a,b[$ tel que $\phi(x) = y$, alors $\int_\alpha^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = [F(\phi(t))]_\alpha^x = F(\phi(x)) - F(\phi(\alpha)) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(x)} f(t)\,dt$.
En passant à la limite, comme $\lim_{x\to a} \phi(x) = \phi(a)$, on obtient le résultat.
(La bijectivité de ϕ est nécessaire pour la bonne définition des intégrales). □

Exemple 2.7.
1. Montrons par un changement de variable que $\int_0^1 sin(\frac{1}{t})\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{sin(u)}{u^2}\,du$ sont de même nature et égales.
   On pose $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ qui est une bijection (de $]0,1]$ vers $[1,+\infty[$) décroissante C^1, ainsi, les intégrales suivantes sont de même nature et égale :
   $$\int_0^1 sin(\frac{1}{t})\,dt = \int_0^1 -\frac{sin(\frac{1}{t})}{t^2}t^2\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{sin(u)}{u^2}\,du$$
2. Montrons que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$ converge et donnons sa valeur.
   On pose $u : x \mapsto e^x$ qui est une bijection (de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$) croissante C^1, ainsi, les intégrales suivantes sont de même nature et égale :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^x}\frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+1/t)}\,dt$$
   De plus, soit $X > 1$, $\int_1^X \frac{1}{1+t^2}\,dt = arctan(X) - \frac{\pi}{4} \underset{X\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{4}$.
   Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

3 Propriétés des intégrales de fonctions positives

Les résultats peuvent tous être adaptés au cas d'une impropreté en a

Théorème 3.1. *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue **positive**. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si l'application $x \in [a,b[\mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée.*

Démonstration. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue positive, alors on pose la fonction $F : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,dt \end{array} \right.$.
Comme F est dérivable, et que pour tout $x \in [a,b[$, $F'(x) = f(x) \geqslant 0$. Ainsi la fonction F est croissante, et elle est majorée sur $[a,b[$. Ainsi $\lim\limits_{x \to b^-} F(x) = \lim\limits_{x \to b^-} int_a^x f(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$, d'où le résultat. □

Proposition 3.2. *(admise) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$ telles que f,g sont positives et $f \leqslant g$ alors :*

1. *Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.*
2. *Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.*

Remarque 3.3. La conclusion reste encore vraie si f,g sont positives et $f \leqslant g$ au voisinage de b.

Proposition 3.4. *(admise) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$ telles que f,g sont de signes constants sur un voisinage de b et $f \underset{b^-}{\sim} g$ alors :*
Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même natures.

Remarque 3.5. Attention on ne peut rien dire sur la valeur de l'intégrale.

Proposition 3.6. *(admise) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$ telles que f,g sont de signes constants sur un voisinage de b et $f = o_{b^-}(g)$ alors :*
Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge aussi.

Exemple 3.7. Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ (qui est impropre en $+\infty$) converge :
On voit que $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et est positive. De plus, $e^{-t^2} = o_{+\infty}(\dfrac{1}{t^2}$ car $\dfrac{e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = t^2 e^{-t^2} \to 0$ par C.C. $(\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 e^{-t^2} = \lim\limits_{X \to +\infty} X e^{-X})$.
Ainsi comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge car $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{-1}{x} + 1 \underset{x \to +\infty}{\to} 1$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge.

Exercice 2. En s'inspirant de l'exemple précédent, montrer que les intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_0^{+\infty} te^{-t^3}\,dt \quad \int_0^{+\infty} (1 - cos(1/t))\,dt \quad \int_0^{+\infty} ln(1 + e^{-t})\,dt$$

Les fonctions $t \mapsto te^{-t^3}$ et $t \mapsto ln(1+e^{-t})$ sont continues et positives sur $[0;+\infty[$ (car $e^{-t} > 0$ et donc $ln(1+e^{-t}) > ln(1) = 0$) et $t \mapsto (1 - cos(1/t))$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$ (car $cos(1/t) < 1$)
De plus, $te^{-t^3} = o_{+\infty}(1/t^2)$ car $\dfrac{te^{-t^3}}{\frac{1}{t^2}} = t^3 e^{-t^2} \to 0$ par C.C. $(\lim\limits_{t \to +\infty} t^3 e^{-t^3} = \lim\limits_{X \to +\infty} X e^{-X})$ et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge.
De même, $1 - cos(1/t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t^2}$ car $1 - cos(x) \underset{0}{\sim} x^2/2$ et donc comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\,dt$ converge (même idée que ci dessus) alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} 1 - cos(1/t)\,dt$ converge.
Enfin, $ln(1+e^{-t}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-t}$ car $ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge car $\displaystyle\int_0^x e^{-t}\,dt = -e^{-x} + 1 \underset{+\infty}{\to} 1$

La convergence absolue

Définition 3.8. On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.

Remarque 3.9. Si f est de signe constant la convergence absolue s'identifie à la convergence.

Théorème 3.10. *Si* $\int_a^b f(t)\,dt$ *est absolument convergente alors elle est convergente*

Démonstration. Soit $f \in C^0([a,b[)$ tel que $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.
On remarque sur $|f| = f_+ + f_-$ et $f = f_+ - f_-$. Ainsi comme $f_+ = \dfrac{|f|+f}{2}$ et $f- = \dfrac{|f|-f}{2}$, alors f_+ et f_- sont continue sur $[a,b[$.
De plus, comme $0 \leqslant f_+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f_- \leqslant |f|$ alors $\int_a^b f_+(t)\,dt$ et $\int_a^b f_-(t)\,dt$ converge.
Ainsi $\int_a^b f(t)\,dt$ converge par CL. □

Remarque 3.11. L'intérêt de cette notion est qu'elle ramène la réflexion sur une fonction positive sur laquelle on peut utiliser les th. de comparaisons ci dessus. Attention, la réciproque est fausse ! ! !(donc si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ diverge alors on ne peut rien dire ! !) L'inté

Exercice 3. Étudier la convergence de

$$\int_1^{+\infty} sin(t)e^{-t}\,dt \;\; et \;\; \int_0^{+\infty} \frac{cos(t^3)}{1+t^2}\,dt$$

Montrons qu'elles sont absolument convergentes :
$|sin(t)e^{-t}| \leqslant e^{-t}$ et comme $t \mapsto |sin(t)e^{-t}|$ est continue et positive et que $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge car $\int_1^x e^{-t}\,dt = e^1 - e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} e^1$. Ainsi $\int_1^{+\infty} |sin(t)e^{-t}|\,dt$ est convergente et donc $\int_1^{+\infty} sin(t)e^{-t}\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

$|\dfrac{cos(t^3)}{1+t^2}| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ et comme $t \mapsto |\dfrac{cos(t^3)}{1+t^2}|$ est continue et positive et que $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$ converge car $\int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}\,dt = arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \pi/2$. Ainsi $\int_1^{+\infty} |\dfrac{cos(t^3)}{1+t^2}|\,dt$ est convergente et donc $\int_1^{+\infty} \dfrac{cos(t^3)}{1+t^2}\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

4 Intégrales de référence

Théorème 4.1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$.
L'intégrale généralisée $\int_0^1 \dfrac{1}{t^\alpha}\,dt$ *est convergente en* 0 *si et seulement si* $\alpha < 1$.
L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^\alpha}\,dt$ *est convergente en* $+\infty$ *si et seulement si* $\alpha > 1$.
Soit $a < b$, *l'intégrale généralisée* $\int_a^b \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ *est convergente en* a *si et seulement si* $\alpha < 1$.

Démonstration. Traitons uniquement la première proposition. Le cas $\alpha \geqslant 0$ est trivial.
Soit $\alpha < 1$, soit $x \in]0,1]$:
$\int_x^1 \dfrac{1}{t^\alpha}\,dt = [\dfrac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}]_x^1 = \dfrac{-1}{\alpha t^{\alpha-1}} + \dfrac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \underset{x\to 0}{\to} \dfrac{1}{1-\alpha}$.

Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge.
Soit $\alpha > 1$, soit $x \in]0,1]$:
$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = [\frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}]_x^1 = \frac{-1}{\alpha t^{\alpha-1}} + \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \underset{x\to 0}{\to} +\infty$.
Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ diverge.
Si $\alpha = 1$, soit $x \in]0,1]$:
$\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = [ln(t)]_x^1 = -ln(x) \underset{x\to 0}{\to} +\infty$.
Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge. □

Exemple 4.2. Comment rédiger une comparaison par rapport à une intégrale de Riemann ?

1. Justifions la convergence de $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^2 ln(t)}$:
   Pour tout $t \in [e,+\infty[$, $t^2 ln(t) > 0$ donc $t \mapsto \frac{1}{t^2 ln(t)}$ est **continue** sur $[e;+\infty[$ (donc une impropreté en $+\infty$) et **positive** sur $[e;+\infty[$.
   De plus, pour tout $t \in [e;+\infty[$, $\frac{1}{t^2 ln(t)} \leqslant \frac{1}{t^2}$ car $ln(t) \geqslant 1$.
   Or, $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge par intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$.
   Donc $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^2 ln(t)}$ converge.
2. Justifions la convergence de $\int_0^1 \frac{e^{-2t}-1}{t^2}\,dt$:
   Pour tout $t \in]0,1]$, $\frac{e^{-2t}-1}{t^2} < 0$ (donc de **signe constant**) car $e^{-2t} < 1$ si $t > 0$ et $t \mapsto \frac{e^{-2t}-1}{t^2}$ est **continue** sur $]0,1]$ (donc une impropreté en 0).
   De plus, $e^{-2t} - 1 \underset{0}{\sim} -2t$ donc $\frac{e^{-2t}-1}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{-2}{t}$ Or, $\int_e^{+\infty} \frac{-2}{t}\,dt$ diverge par intégrale de Riemann en 0 avec $\alpha = 1$.
   Donc $\int_e^{+\infty} \frac{e^{-2t}-1}{t^2}\,dt$ diverge.

Théorème 4.3. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$ et alors*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $x > 0$:

$$\int_0^x e^{-\lambda t}\,dt = [\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}]_0^x = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{\lambda}$$

D'où le résultat. □