HEC ECS 1 : Fonctions : généralités

1 Rappels sur les ensembles de défintion

Dans ce chapitre, on considère des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.

Définition 1.1. L'ensemble des réels x ayant une image par f est appelé ensemble de définition de f et est noté D_f.

Remarque 1.2. On recherche souvent les conditions d'existence de $f(x)$ selon les critère suivants :
- Le dénominateur d'un quotient ne doit pas être nul.
- Si $f(x) = ln(u(x))$ alors $u(x)$ doit être strictement positif.
- Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$ alors $u(x)$ doit être positif.

Mais d'autres critères peuvent exister.

Exemple 1.3. Donner l'ensemble de définition de f dans les cas suivants :
- $f(x) = \dfrac{1+e^{2x}}{1-e^{2x+1}}$
  Comme $1+e^{2x}$, $1-e^{2x+1}$ sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $f(x)$ est définie ssi $1-e^{2x+1} \neq 0$
  Or $1-e^{2x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{2}$
  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{1}{2}\}$
- $f(x) = ln(x+\sqrt{x^2-1})$
  $\sqrt{x^2-1}$ est définie ssi $x^2-1 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$.
  De plus, $ln(x+\sqrt{x^2-1})$ est définie ssi $\sqrt{x^2-1} \geqslant 0$ et $x+\sqrt{x^2-1} > 0$
  Or $x^2-1 < x^2$ donc $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x|$
  Ainsi si $x >\geqslant 1$, il est évident que $x+\sqrt{x^2-1} > 0$ mais si $x \leqslant -1$ alors $\sqrt{x^2-1} < |x| = -x$ et donc $\sqrt{x^2-1}+x < 0$.
  Ainsi $D_f = [1;+\infty[$
- $f(x) = ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
  $\dfrac{1+x}{1-x}$ est définie ssi $x \neq 1$ et donc $ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ est définie ssi $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$ et $x \neq 1$.
  Or, par un tableau de signes, $\dfrac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-1,1[$.
  Ainsi $D_f =]-1,1[$
- $f(x) = \sqrt{cos(x)}$ est définie ssi $cos(x) \geqslant 0$
  Ainsi $D_f = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}]-\pi/2+2k\pi;\pi/2+2k\pi[$.

Définition 1.4. On définit l'image de I par f, noté $f(I)$ par l'ensemble des $f(x)$ où $x \in I$.

Exemple 1.5. Pour f définit par $f(x) = cos(x)$, donner $f(\mathbb{R})$ et $f([0;\dfrac{3\pi}{4}[)$

$f(\mathbb{R}) = [-1,1]$, et $f([0;\dfrac{3\pi}{4}]) = [-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1]$.

Définition 1.6. On appelle voisinage de a toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert comprenant a (ou d'extreminité a dans le cas où a est un infini).

Exemple 1.7. Montrer que $ln(x) < 0$ sur un voisinage de $1/2$.
Il suffit de remarque que sur $]0,1[$, $ln(x) < 0$.

2 Courbe représentative, parité, symétries

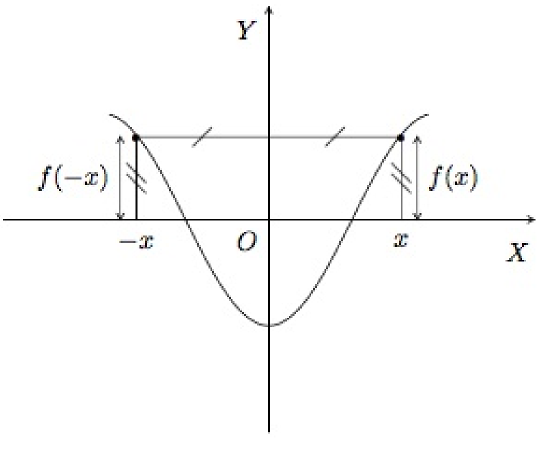
Définition 2.1. On appelle courbe représentative de la fonction f, l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x parcourt D_f.

Définition 2.2. Soit f une fonction telle que D_f soit centré en 0.
- On dit que f est **paire** si $\forall x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est **impaire** si $\forall x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$

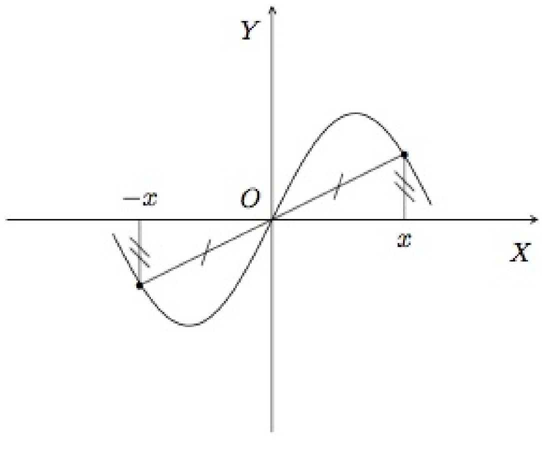
Exemple 2.3. Donner la parité des fonctions suivantes :
- $f(x) = x^2 + 4x^4$
  $D_f = \mathbb{R}$ est centrée en 0. $f(-x) = (-x)^2 + 4(-x)^4 = x^2 + x^4 = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi la fonction est paire.
- $f(x) = \dfrac{1-x^2}{sin(x)}$
  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ est centrée en 0.
  De plus, $f(-x) = \dfrac{1-(-x)^2}{sin(-x)} = \dfrac{1-x^2}{-sin(x)} = -f(x)$. Ainsi la fonction f est impaire.
- $f(x) = x^n$
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_f = \mathbb{R}$ est centrée en 0.
  De plus, si n est paire alors $(-x)^n = x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ainsi f est paire.
  Si n est impaire alors $(-x)^n = -x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ainsi f est impaire.

- $f(x) = |g(x)|$ où g est une fonction impaire.
  Pour tout $x \in_g = D_f$, $f(-x) = |g(-x)| = |-g(x)| = |g(x)| = f(x)$. Ainsi f est paire.

Proposition 2.4. *Si f est paire, alors la courbe de f dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'axe (Oy). Si f est impaire, alors la courbe de f dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'origine O du repère.*



fonction paire



fonction impaire

Exemple 2.5. Etudier la parité des fonctions suivantes : $f : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $g : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
$D_f = D_g = \mathbb{R}$ est centrée en 0.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$ donc f est paire.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -g(x)$ donc g est impaire.

Définition 2.6. Etant donné un réel T strictement positif, on dit que T est une **période** de f si
$x \in D_f \Leftrightarrow x + T \in D_f$ et $\forall x \in D_f, \quad f(x+T) = f(x)$.
On dit que f est périodique si elle admet au moins une période non nulle.

Par exemple, les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π.

Exemple 2.7. Montrer que $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{x}{5}\right)$ est périodique.
$D_f = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 10\pi) = cos(\dfrac{x+10\pi}{5}) = cos(\dfrac{x}{5} + 2\pi) = cos(\dfrac{x}{5}) = f(x)$ donc f est périodique de période 10π (on peut montrer que f ets aussi périodique de période 20π.

Remarque 2.8. L'intérêt principal de ces notions est que l'on peut réduire l'intervalle d'étude d'une fonction qui possède une propriété de parité ou de périodicité. Par exemple, si une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est paire, on l'étudiera sur $\mathbb{R}^+$ uniquement.

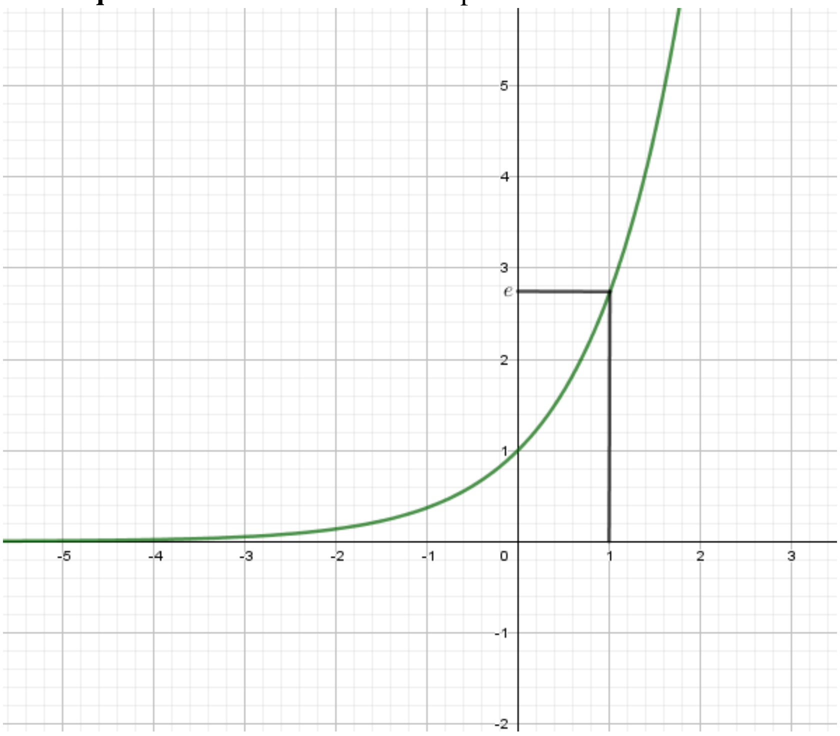
3 Etudes des fonctions usuelles

3.1 La fonction exponentielle

Proposition 3.1. *On rappelle les propriétés de la fonction exp.*

1. *Ensemble de définition :* $\mathbb{R}$.
2. *Sens de variation : La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
3. *Limites :* $\lim_{x\to+\infty} exp(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} exp(x) = 0$
4. *Parité : Aucune*
5. *Périodicité : Aucune*

Remarque 3.2. On a ainsi la courbe représentative suivante :

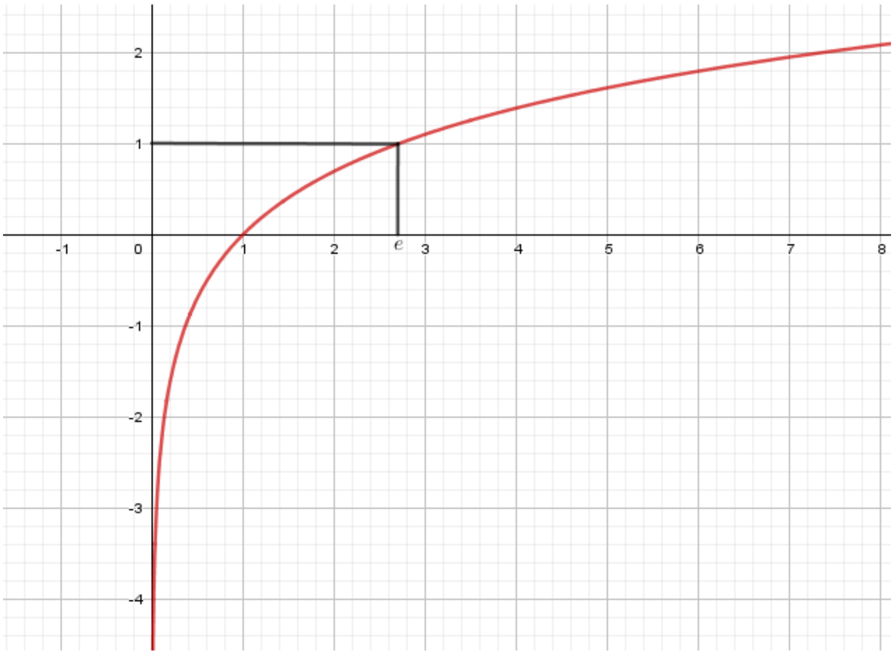


3.2 La fonction logarithme

Proposition 3.3. *On rappelle les propriétés de la fonction ln.*

1. *Ensemble de définition :* $\mathbb{R}_+^*$.
2. *Sens de variation : La fonction logarithme est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$.
3. *Limites :* $\lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to 0^+} exp(x) = -\infty$
4. *Parité : Aucune*
5. *Périodicité : Aucune*

Remarque 3.4. On a ainsi la courbe représentative suivante :

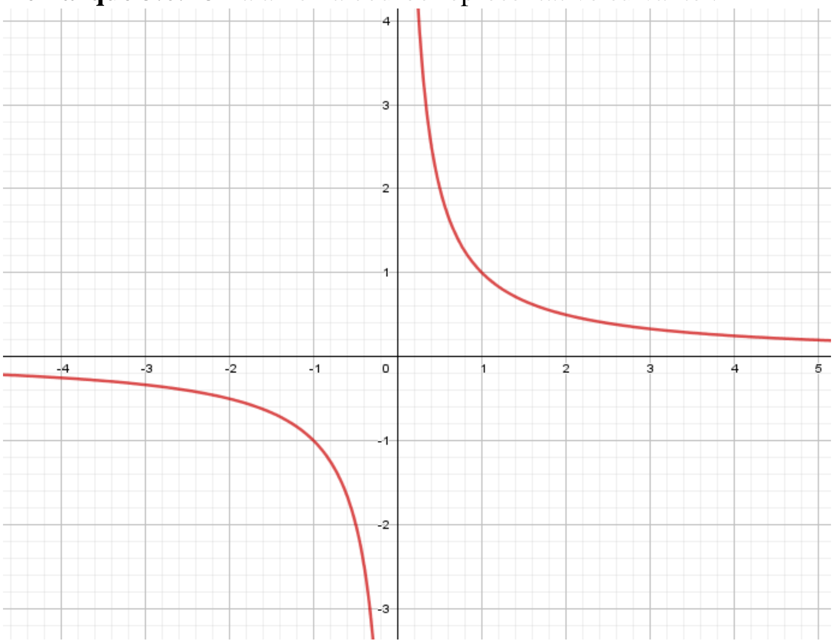


3.3 La fonction inverse

Proposition 3.5. *On rappelle les propriétés de la fonction inverse.*

1. *Ensemble de définition :* $\mathbb{R}^*$.
2. *Sens de variation : La fonction inverse est strictement décroissante sur* $]-\infty;0[$ *et sur* $]0;+\infty[$.
3. *Limites :* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
4. *Parité : La fonction inverse est impaire.*
5. *Périodicité : Aucune*

Remarque 3.6. On a ainsi la courbe représentative suivante :

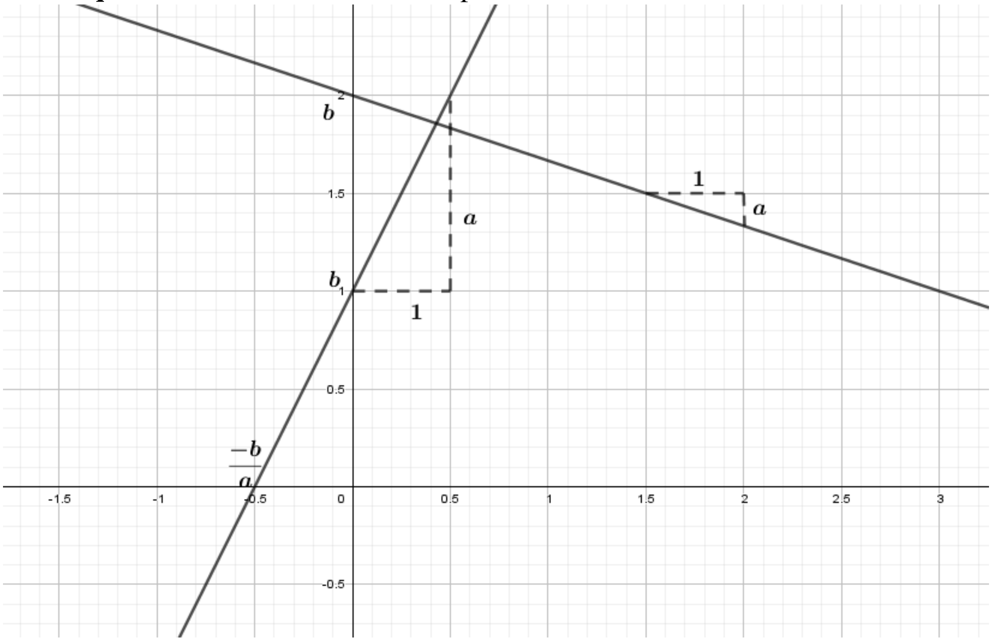


3.4 Les fonctions affines

Proposition 3.7. *On rappelle les propriétés des fonctions affines définies par* $f(x) = ax + b$ *avec* $a \neq 0$.

1. *Ensemble de définition :* $\mathbb{R}$.
2. *Sens de variation : si* $a > 0$ *la fonction est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et si* $a < 0$ *la fonction est strictement décroissante.*
3. *Limites : si* $a > 0$ *alors* $\lim_{x\to+\infty} ax+b = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} ax+b = -\infty$ *et si* $a < 0$ *alors* $\lim_{x\to+\infty} ax+b = -\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} ax+b = +\infty$

Remarque 3.8. On a ainsi la courbe représentative suivante :

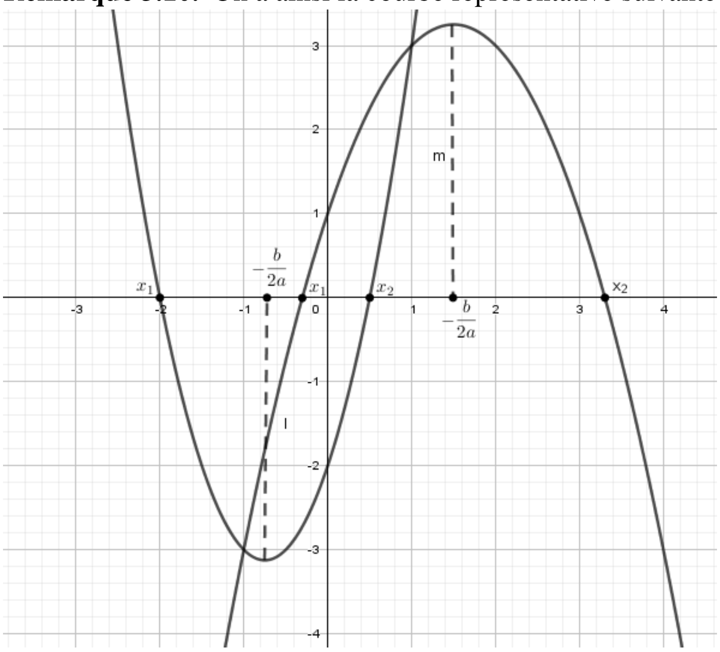


3.5 Les fonctions polynômes du second degré

Proposition 3.9. *On rappelle les propriétés des fonctions polynômes du second degré définies par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.*

1. *Ensemble de définition :* $\mathbb{R}$.
2. *Sens de variation : si $a > 0$ la fonction est strictement décroissante sur $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$ et si $a < 0$ la fonction est strictement croissante sur $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ et strictement décroissante sur $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$.*
3. *Limites : si $a > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^2 + bx + c = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^2 + bx + c = +\infty$ et si $a < 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^2 + bx + c = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^2 + bx + c == -\infty$*

Remarque 3.10. On a ainsi la courbe représentative suivante :



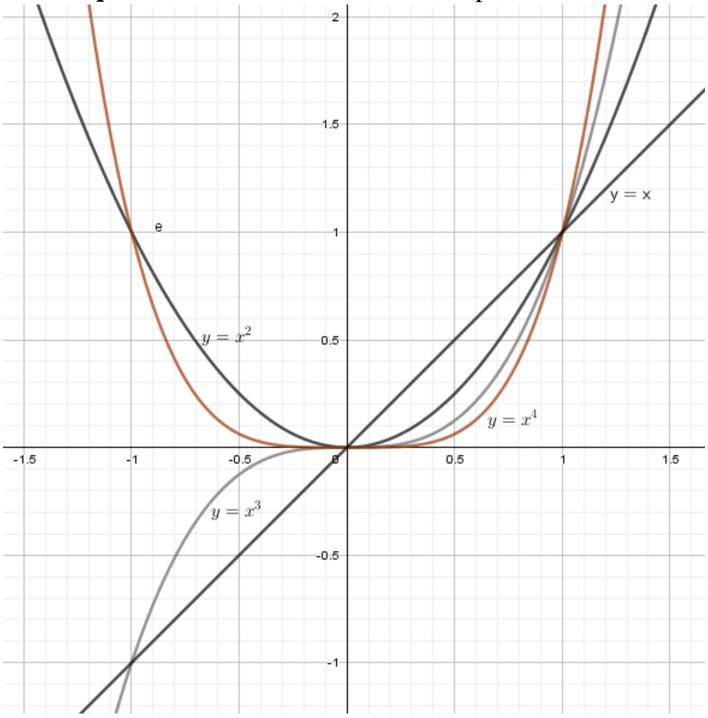
3.6 Les fonctions puissances

Proposition 3.11. *On rappelle les propriétés des fonctions puissances définies par $f(x) = x^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$*

1. *Ensemble de définition :* $\mathbb{R}$.
2. *Sens de variation : si p est paire alors la fonction est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et si p est impaire alors la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
3. *Limites : si p est paire alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p = +\infty$ et si p est impaire alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p == -\infty$*

4. *Parité : si p est paire alors la fonction est paire et si p est impaire alors la fonction est impaire.*
5. *Périodicité : Aucune*

Remarque 3.12. On a ainsi la courbe représentative suivante :

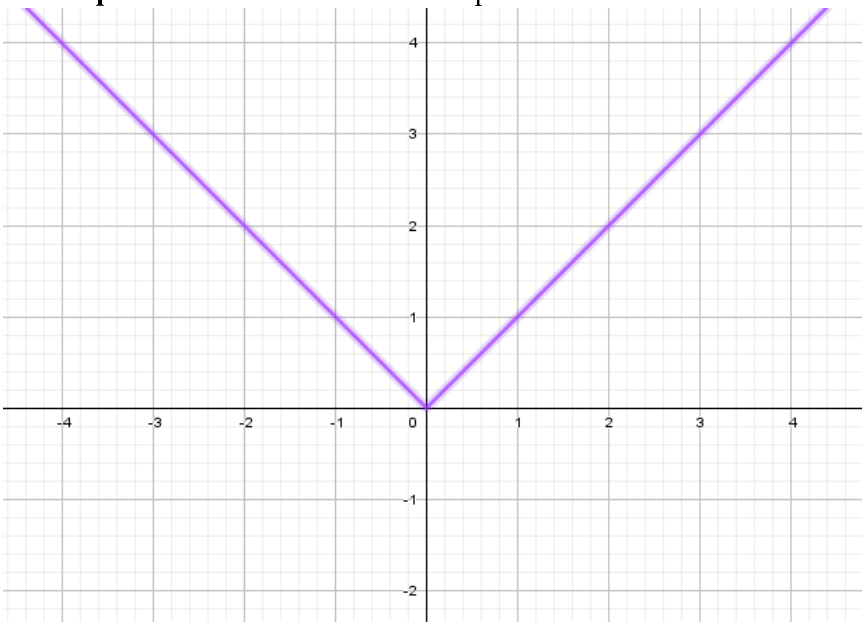


3.7 La fonction valeur absolue

Proposition 3.13. *On rappelle les propriétés de la fonction valeur absolue.*

1. *Ensemble de définition :* $\mathbb{R}$.
2. *Sens de variation : La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur* $]-\infty;0]$ *et sur* $[0;+\infty[$.
3. *Limites :* $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty$, *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$
4. *Parité : La fonction valeur absolue est paire.*

Remarque 3.14. On a ainsi la courbe représentative suivante :



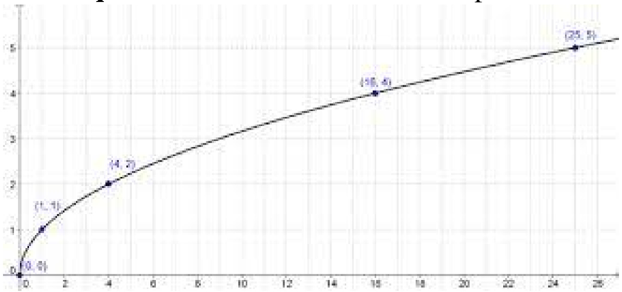
3.8 La fonction racines carrées

Proposition 3.15. *On rappelle les propriétés de la fonction racine carrée.*

1. *Ensemble de définition :* $\mathbb{R}_+$.
2. *Sens de variation : La fonction racine carrée est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$.

3. *Limites :* $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ *et* $\sqrt{0}=0$.
4. *Parité : Aucune*
5. *Périodicité : Aucune*

Remarque 3.16. On a ainsi la courbe représentative suivante :

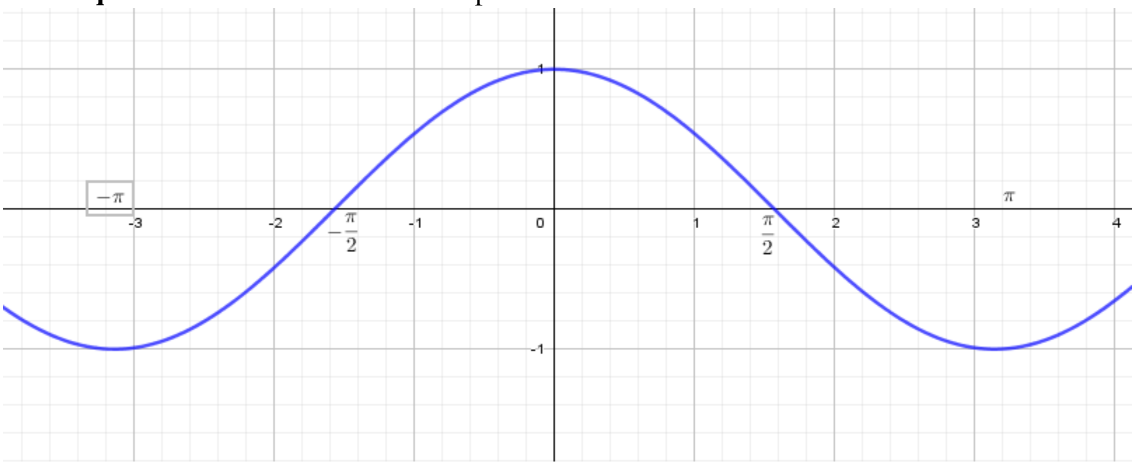


3.9 Les fonctions cosinus et sinus

Proposition 3.17. *On rappelle les propriétés de la fonction cosinus :* $x\mapsto cos(x)$.

1. *Ensemble de définition :* $\mathbb{R}$.
2. *Parité : La fonction cosinus est paire.*
3. *Périodicité : La fonction cosinus est* 2π*-périodique.*
4. *Sens de variation : La fonction cosinus est strictement croissante sur* $[-\pi;0]$ *et strictement décroissante sur* $[0;\pi]$.

Remarque 3.18. On a ainsi la courbe représentative suivante :



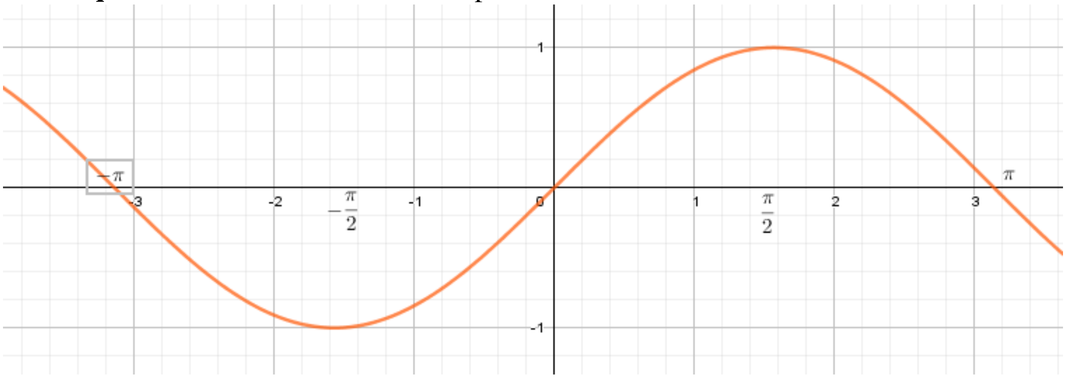
Démonstration. Plan de l'étude de fonction :
On admet que pour tout x, $cos(x)$ est définie.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $cos(-x)=cos(x)$, et donc la fonction cos est paire.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $cos(x+2\pi)=cos(x)$ et donc la fonction cos est 2π-périodique .
On réalise donc l'étude sur $[0;\pi]$ puis on l'étend par parité sur $[-\pi;\pi]$ puis par périodicité sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $cos'(x)=-sin(x)$ et donc la fonction cos est strictement décroissante sur $[0;\pi]$ avec $cos(0)=1$ et $cos(\pi/2)=0$ et $cos(\pi)=-1$.

□

Proposition 3.19. *On rappelle les propriétés de la fonction sinus :* $x\mapsto sin(x)$.

1. *Ensemble de définition :* $\mathbb{R}$.
2. *Parité : La fonction sinus est impaire.*
3. *Périodicité : La fonction sinus est* 2π*-périodique.*
4. *Sens de variation : La fonction sinus est strictement croissante sur* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ *et strictement décroissante sur* $[pi;-\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{\pi}{2};\pi]$.

Remarque 3.20. On a ainsi la courbe représentative suivante :



Démonstration. Plan de l'étude de fonction : On admet que pour tout x, $sin(x)$ est définie.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $sin(-x) = -sin(x)$, et donc la fonction sin est impaire.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $sin(x+2\pi) = sin(x)$ et donc la fonction sin est 2π-périodique .
On réalise donc l'étude sur $[0;\pi]$ puis on l'étend par parité sur $[-\pi;\pi]$ puis par périodicité sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $sin'(x) = cos(x)$ et donc la fonction sin est strictement croissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{2};\pi]$ avec $sin(0) = 0$ et $sin(\pi/2) = 1$ et $sin(\pi) = 0$.

□

4 Majorant et minorant, borne supérieure et inférieure, extremum

— f est positive sur I lorsque pour tout $x \in D_f$, $f(x) \geqslant 0$
— f est négative sur I lorsque pour tout $x \in D_f$, $f(x) \leqslant 0$
— f est majorée sur I lorsque il existe $K \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \leqslant K$
— f est minorée sur I lorsque il existe $K \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \geqslant K$
— f est bornée sur I lorsque il existe $K, K' \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in D_f$, $K' \leqslant f(x) \leqslant K$

Remarque 4.1. f est bornée sur $I \Leftrightarrow$ il existe $K \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in D_f$, $|f(x)| \leqslant K$

Définition 4.2. Soit f une fonction définie sur I uin intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in A$.
— On dit que f admet un maximum global sur A en x_0 lorsque $\forall x \in A$, $f(x) \leqslant f(x_0)$. On note alors $f(x_0) = \max_{x\in A} f(x)$.
— On dit que f admet un minimum global sur A en x_0 lorsque $\forall x \in A$, $f(x) \geqslant f(x_0)$. On note alors $f(x_0) = \min_{x\in A} f(x)$.
— On dit que f admet un maximum local si il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f(x_0)$ est un maximum de f.
— On dit que f admet un minimum local si il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f(x_0)$ est un minimum.

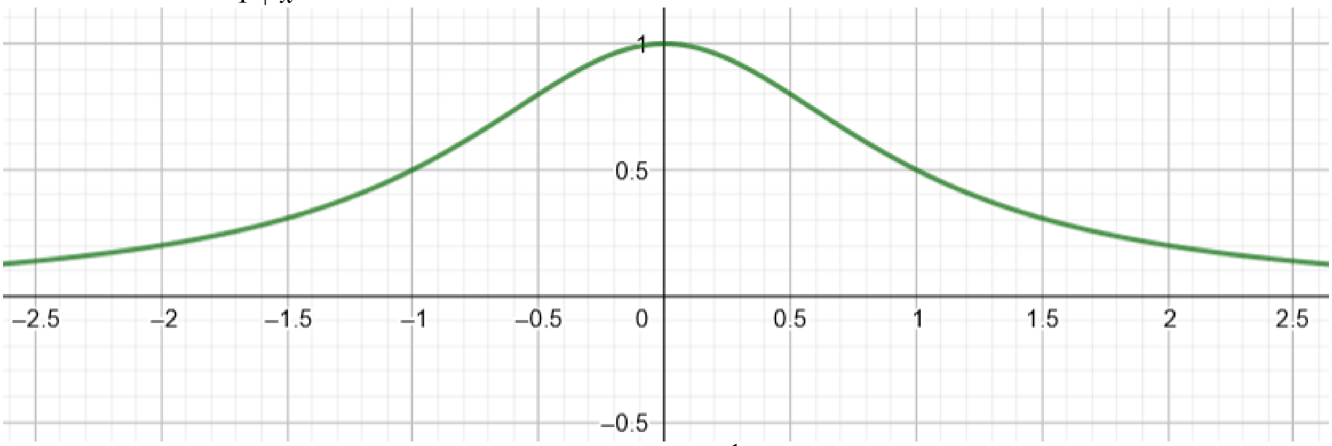
Définition 4.3. Soit f une fonction définie sur I uin intervalle de $\mathbb{R}$
— Si la fonction f est majorée sur A, alors l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément, appelé **borne supérieur de** f sur A, et noté $\sup_{x\in A} f(x)$.
— Si la fonction f est minorée sur A, alors l'ensemble de ses minorants admet un plus grand élément, appelé **borne inférieur de** f sur A, et noté $\inf_{x\in A} f(x)$.

Remarque 4.4. La borne supérieure d'une fonction n'est pas toujours atteinte mais quand elle l'est, il s'agit alors du maximum global de la fonction.
De même si la fonction admet un maximum global, c'est également la borne supérieure de la fonction. Il en va de même pour la borne inférieure.
Il existe bien sûr des fonctions sans borne supérieur, avec borne supérieur et sans maximum, et avec les 2.

Exemple 4.5. — Prenons la fonction $f = \exp$. Donner $f(\mathbb{R})$ et en déduire, s'ils existent, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \exp(x)$ et $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \exp(x)$. Que dire du *min* et du *max* ?
$f(\mathbb{R}) =]0;+\infty[$, et donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \exp(x)$ n'existe pas (si on suppose que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \exp(x) = M$, comme $exp(x) \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $exp(x) > M$) et $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} = 0$: en effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $exp(x) > 0$ donc 0 est minorant de exp et c'est le plus grand car si on suppose qu'il existe un minorant strictement positif $m > 0$, comme $exp(ln(m/2)) = m/2 < m$ c'est absurde.
Il n'y a pas de min ni de max.

— Déterminer s'ils existent l'inf et le sup de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
Commencçons par comprendre $f(\mathbb{R})$ en étudiant la fonction f :

$D_f = \mathbb{R}$, et $f'(x) = \dfrac{-2x}{1+x^2}$. Les limites sont simples. On trouve donc :



On comprend donc que $f(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (en effet $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant 1+x^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2$) et comme $f(0) = 1$, alors $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$

De plus, 0 est un minorant de f et c'est le plus grand car si il existe $m > 0$ minorant de f alors c'est absurde car $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < m$ (on peut par exemple, prendre la valeur $x_0 = \sqrt{1/m-1}+1$).

— Discuter de l'existence des bornes sup et inf ainsi que du min et max de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$

Pour tout $x \in \mathbb{Z}^*$, $f(x) = 1$.

Pour tout $x > 1$, $0 < 1 - \dfrac{1}{x} < f(x) \leqslant 1$

Pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) = 0$.

Pour tout $x < 0$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$ et donc $1 \leqslant \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} < 1 - \dfrac{1}{x}$

Ainsi 0 est l'inf de la fonction car pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \geqslant 0$ et $f(1/2) = 0$, et c'est donc le min de la fonction.

Il n'y a pas d'inf, ni de max car $\lim\limits_{x\to0, x\in]-1,0[} f(x) = \lim\limits_{x\to0, x\in]-1,0[} \dfrac{-1}{x} = +\infty$.

5 Le sens de variation, les composées et les fonctions bijectives.

Définition 5.1. f est dite **croissante** [resp. **strictement croissante**] sur I lorsque

$$\forall x \text{ et } y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \ \ [\text{resp. } x < y \Rightarrow f(x) < f(y)]$$

f est dite **décroissante** [resp. **strictement décroissante**] lorsque

$$\forall x \text{ et } y \in I, x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x) \ \ [\text{resp. } x < y \Rightarrow f(y) < f(x)]$$

f est [strictement] monotone si elle est [strictement] croissante ou [strictement] décroissante.

ATTENTION ! La fonction $(x \mapsto \dfrac{1}{x})$ est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. On ne dit pas qu'elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$: une fonction est monotone sur un INTERVALLE.En effet : $\dfrac{1}{-2} < \dfrac{1}{2}$ et $-2 < 2$, donc il existe $x < y$ et $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{y}$ (contre exemple à : pour tout $x < y$ tel que $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$

Exemples : Est ce que $\forall x$ et $y \in]0;+\infty[$, $x < y \Rightarrow \ln(x) < \ln(y)$?
Oui car la fonction *ln* est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
Et : $\forall x$ et $y \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow \lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor$?
Non, la fonction partie entière est croissante mais n'est pas strictement croissante : en effet, $1.1 < 1.2$, $\lfloor 1.1 \rfloor = 1 = \lfloor 1.2 \rfloor$

Remarque 5.2. Si f est strictement croissante sur I alors

$$\forall x \text{ et } y \in I, x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

mais le résultat est faux avec f seulement croissante.
En effet : Si f est strictement croissante, alors $\forall x$ et $y \in I$, $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. Montrons que $\forall x$ et $y \in I$, $f(x) < f(y) \Leftrightarrow x < y$:
Soit x, y tel que $f(x) < f(y)$. Si on suppose que $x \geqslant y$ alors $f(x) \geqslant f(y)$ (par croissance de f) ce qui absurde.
Pour le cas f seulement croissant, un contre exemple est f constant et donc $1 < 2$ mais $f(1) = k = f(2)$.
Avec cette exemple, on voit que l'on a pas non plus $\forall x$ et $y \in I$, $x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y)$

Définition 5.3. On rappelle que la fonction $g \circ f$, appelée composée de f par g est définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Proposition 5.4. *Soient f et g deux fonctions de même sens de variation alors $f+g$ a encore le même sens de variation.*
À condition que les ensembles de définition correspondent, si f et g ont les même sens de variation alors $g \circ f$ est croissante et si f et g ont des sens de variation différents slaors $g \circ f$ est décroissante.

Exemple 5.5. Écrire la fonction f comme composée de 2 fonctions et en déduire son sens de variation dans les cas suivants :

— $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

La fonction $x \mapsto 1+x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$. De plus pour $x \in]-\infty;0]$, $x^2+1 \in]0;+\infty[$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc par composée, la fonction f est croissante sur $]-\infty;0]$.

La fonction $x \mapsto 1+x^2$ est croissante sur $[0;+\infty[$. De plus pour $x \in [0;+\infty[$, $x^2+1 \in]0;+\infty[$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc par composée, la fonction f est décroissante sur $[0;+\infty[$.

— $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

Faire en utilisant $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$

— $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)^2$

Faire avec les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$ et $x \mapsto x^2$

Définition 5.6. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. Etant donné un réel y, si on peut trouver x dans A tel que $f(x) = y$, on dit que x est un **antécédent** de y.

Définition 5.7. Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \to B$ une fonction. On dit que f est une **bijection** lorsque tout réel de B possède **exactement un** antécédent par f.

Exemple 5.8.

1. $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{pmatrix}$ n'est pas une bijection. Pourquoi ?
   1 a 2 antécédents, 1 et -1.
2. $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{pmatrix}$ non plus. Pourquoi ?
   -1 n'a pas d'antécédent.
3. $h : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{pmatrix}$ est une bijection.
   Pour tout $y \geqslant 0$, $x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ ou $-\sqrt{y} \leqslant 0$, donc $x^2 = y$ n'a qu'une seule solution dans $\mathbb{R}_+$, d'où le fait que y n'a qu'un seul antécédent par f.
4. $i : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{pmatrix}$ est-elle une bijection ?
   Non car 0 a une infinité d'antécédents : $\pi/2 + k\pi$

Définition 5.9. Soit $f : A \to B$ une bijection. Alors, pour tout réel $y \in B$, il existe un et un seul antécédent x dans A par f (tel que $y = f(x)$). On peut donc définir une fonction de B vers A qui, à tout réel y de B associe son unique antécédent par f.
Cette fonction s'appelle **bijection réciproque** de f et est notée f^{-1}.

ATTENTION ! ne confondez pas $f^{-1}(x)$ et $(f(x))^{-1}$!
Par exemple, dans le cas de la fonction carré $h : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{pmatrix}$, on a $h^{-1} : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{pmatrix}$.

Donc $h^{-1}(4) =$ mais $(h(4))^{-1} =$

Remarque 5.10. On a ainsi, si f^{-1} est bien définie, $\forall x \in D_f$, $f^{-1}(f(x)) = x$ et $\forall x \in D_{f^{-1}}$, $f(f^{-1}(x)) = x$ (ainsi $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id$ où id est la fonction identité qui à x associe x.)

Donnons d'autres couples célèbres de bijection/bijection réciproque :
On écrira les couples suivants : $x \mapsto x/x \mapsto x$ et $x \mapsto 1/x/x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto \sqrt{x}/x \mapsto x^2$ et $x \mapsto exp(x)/x \mapsto ln(x)$ et $x \mapsto x+a/x \mapsto x-a$ (Attention aux ensembles de définition)

Méthode : Si $f : A \to B$, pour montrer si f est bijective, on cherche les antécédents de y pour y quelconque dans B (attention aux potentiels cas particuliers), pour cela :

On résout $y = f(x)$ ("on cherche x").
On vérifie que les solutions sont dans A.
On trouve ainsi tous les antécédents de y par f : f est bijective si et seulement si pour tout $y \in B$, on a un unique antécédent x dans A.

6 Une étude de fonction : la fonction tangente

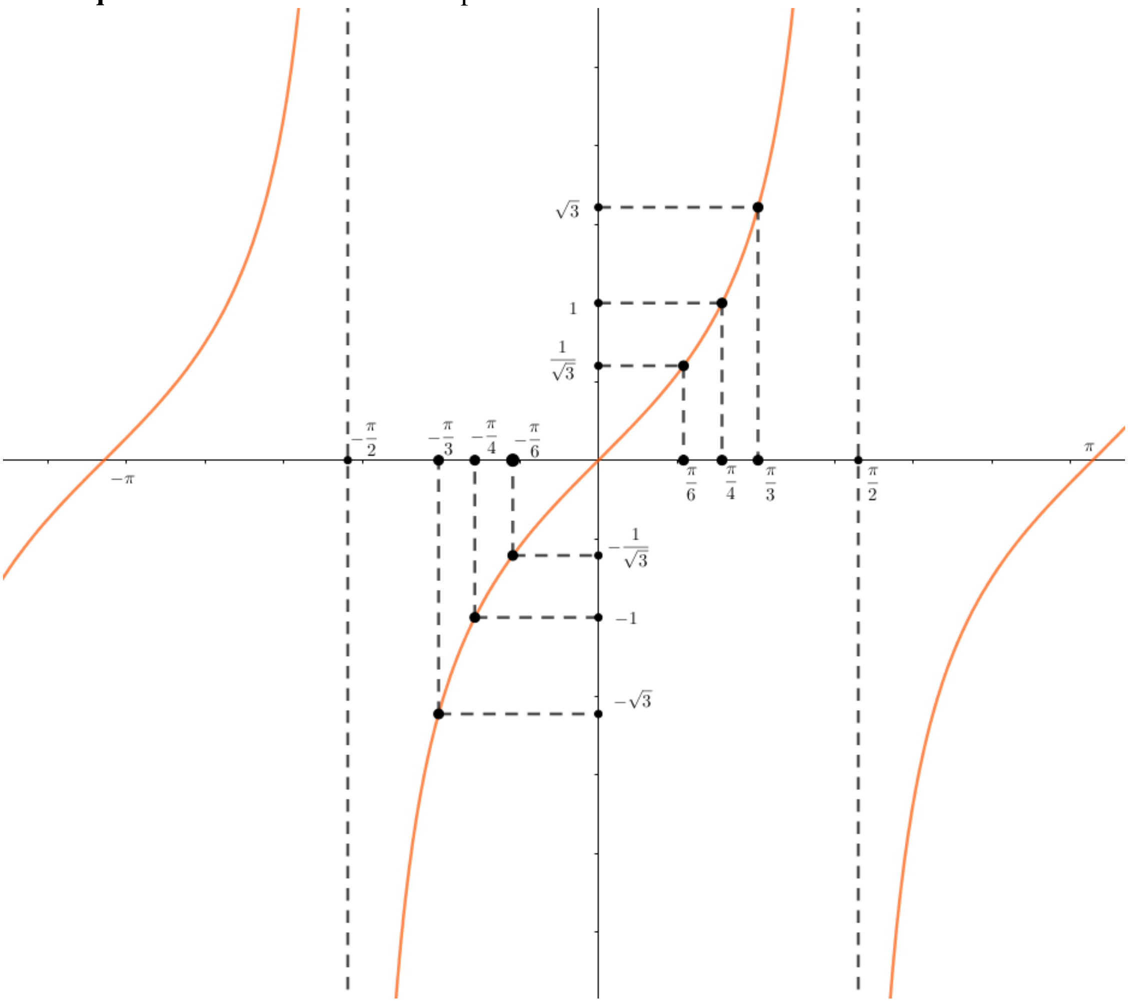
Définition 6.1. La fonction tangente est définie par $x \mapsto tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$

Proposition 6.2. *1. L'ensemble de définition de la fonction tangente est* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}]-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi[$

2. *Parité : La fonction tan est impaire.*
3. *Périodicité : La fonction tan est* π*-périodique.*
4. *Sens de variation : La fonction tan est strictement croissante sur chaque intervalle du type* $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$.
5. *On a le tableau de valeur suivant :*

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Remarque 6.3. On a ainsi la courbe représentative suivante :



Démonstration. Plan de l'étude de fonction :
$cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi $D_{tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est centrée en 0. Pour tout $x \in D_{tan}$, $tan(-x) = \dfrac{sin(-x)}{cos(-x)} = \dfrac{-sin(x)}{cos(x)} = -tan(x)$, donc tan est impaire.

De plus, si $x \in D_{tan}$ alors $x+\pi \in D_{tan}$ et pour tout $x \in D_{tan}$, $tan(x+\pi) = \dfrac{sin(x+\pi)}{cos(x+\pi)} = \dfrac{-sin(x)}{-cos(x)} = \dfrac{sin(x)}{cos(x)} = tan(x)$, donc tan est π-périodique.
On réduit l'intervalle d'étude à $]-\pi/2;\pi/2[= I$:
Par quotient de fonctions dérivables, tan est dérivables sur I (donc continue), et pour tout $x \in I$:
$tan'(x) = \dfrac{cos(x)cos(x)+sin(x)sin(x)}{cos(x)^2} = \dfrac{1}{cos^2(x)} = \dfrac{1}{cos^2(x)} + \dfrac{sin^2(x)}{cos^2(x)} = 1+tan^2(x) > 0$.
Enfin, $\lim\limits_{x\to\pi/2^-} cos(x) = 0^+$, $\lim\limits_{x\to\pi/2^-} sin(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\pi/2^+} cos(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\pi/2^+} sin(x) = -1$ et donc $\lim\limits_{x\to\pi/2^-} tan(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\pi/2^+} tan(x) = -\infty$
Pour les valeurs remarquables, c'est évident.

$\square$