Chapitre 30 : Espaces vectoriels sommes

1 Sommes d'espaces vectoriels

Définition 1.1. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $\boxed{F+G=\{u+v \mid (u,v)\in F\times G\}}$.

Remarque 1.2. (essentielle) Ainsi l'ensemble $F+G$ est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent comme somme d'un vecteur de F et de G.
De même, $E=F+G$ ssi pour tout vecteurs $u\in E$, il existe $f\in F$ et $g\in G$ tels que $u=f+g$.

Définition 1.3. Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E (avec $n\geq 2$). L'ensemble des vecteurs de E de la forme $u=\sum_{i=1}^{n} u_i$ avec $\forall i\in [\![1,n]\!]$, $u_i\in F_i$ est appelé somme des n sous-espaces vectoriels F_i. Il est noté $F_1+\cdots+F_n$, ou $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

Proposition 1.4. *Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, alors $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F+G$ est un sev de E.*

Démonstration. Montrons que la somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel, la généralisation à n sous-espaces se montrant facilement de manière identique.
$0\in F+G$ car $0=0+0$ avec $0\in F$ et $0\in G$. Soit $x,y\in F+G$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrons que $x+\lambda y\in\mathbb{R}$:
$x=f+g$ avec $f\in F$, $g\in G$ et $y=f'+g'$ avec $f'\in F$, $g'\in G$.
Ainsi $x+\lambda y=f+g+\lambda(f'+g')=f+\lambda f'+g+\lambda g'\in F+G$ car $f+\lambda f'\in F$ car F est un ev. De même pour $g+\lambda g'$. D'où le résultat. $\square$

Exemple 1.5.

— Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $F=\mathrm{Vect}\big((1,0)\big)$ et $G=\mathrm{Vect}\big((0,1)\big)$. Que vaut $F+G$?

$F+G$ est l'ensemble des $u+v$ avec $u\in F$, c'est à dire $u=\lambda(1,0)=(\lambda,0)$ et $v\in G$, c'est à dire $v=\beta(1,0)=(0,\beta)$.
Ainsi $u+v=(\lambda,\beta)$ avec $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$.
Ainsi $F+G=\{(\lambda,\beta)|\lambda,\beta\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2$.

— Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F=\mathrm{Vect}\big((-1,2,1),(0,1,0)\big)$ et $G=\mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,0,1)\big)$. Que vaut $F+G$?

$F+G$ est l'ensemble des $u+v$ avec $u\in F$, c'est à dire $u=\lambda(-1,2,1)+\alpha(0,1,0)=(-\lambda,2\lambda+\alpha,\lambda)$ et $v\in G$, c'est à dire $v=\beta(1,0,0)+\gamma(0,0,1)=(\beta,0,\gamma)$.
Ainsi $F+G=\{(-\lambda+\beta,2\lambda+\alpha,\lambda+\gamma)|\alpha,\beta,\gamma,\lambda\in\mathbb{R}\}$.
Ainsi $F+G=vect((-1,2,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))=\mathbb{R}^3$

— Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F=\mathrm{Vect}\big((1,0,1),(0,2,0)\big)$ et $G=\mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$.
Par la même écriture, on a que $F+G=vect((1,0,1),(0,2,0),(1,1,1))=vect((1,0,1)(0,2,0))$ car $(1,1,1)=(1,0,1)+1/2(0,2,0)$.

Attention, même si dans le cas où F et G s'écrivent sous la forme d'un vect alors il suffit de prendre le vect de tous les vecteurs, il faut garder en tête la définition de $F+G$ dans les cas où l'on ne peut pas écrire F ou G sous forme d'un vect.

2 La relation de Grassman

Théorème 2.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E, on a*

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}$$

Démonstration. Soit $(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p})$ une base de $F \cap G$. C'est en particulier une famille libre de F et une famille libre de G. On la complète en une base $(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}, \overrightarrow{y_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{y_{p+r}})$ de F ainsi qu'en une base $(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}, \overrightarrow{z_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{z_{p+s}})$ de G. On a ainsi :

$$\dim(F \cap G) = p \quad \dim(F) = p + r \quad \dim(G) = p + s$$

On va montrer que :

$$(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}, \overrightarrow{y_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{y_{p+r}}, \overrightarrow{z_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{z_{p+s}})$$

est une base de $F+G$. Tout d'abord, cette famille de vecteurs de E est clairement une famille génératrice de vecteurs de $F+G$. Soit maintenant $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_r, \nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{K}^{p+q+s}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{x_k} + \sum_{k=1}^{r} \mu_k \overrightarrow{y_{p+k}} + \sum_{k=1}^{s} \nu_k \overrightarrow{z_{p+k}} = \overrightarrow{0_E}$$

Alors, on a :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{x_k} + \sum_{k=1}^{r} \mu_k \overrightarrow{y_{p+k}} = -\sum_{k=1}^{s} \nu_k \overrightarrow{z_{p+k}}$$

Le vecteur de gauche est élément de F, celui de droite est élément de G. Comme ils sont égaux, ils sont tous les deux éléments de $F \cap G$. Chacun est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}$. Alors, dans le vecteur de gauche, on en déduit que les μ_k sont tous nuls (puisque $(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}, \overrightarrow{y_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{y_{p+r}}\ )$ est une base de F) et que les ν_k sont tous nuls (puisque $(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}, \overrightarrow{z_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{z_{p+s}})$ est une base de G). On obtient donc que :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{0_E}$$

ce qui assure que tous les λ_k sont nuls. La famille est donc libre dans E. C'est alors une base de $F+G$. En conséquence, on a :

$$\dim(F+G) = p + r + s = (p+r) + (p+s) - p = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

□

Remarque 2.2. Cette relation est facile à retenir puisqu'on peut faire une analogie avec une autre formule dans les probabilités

Remarque 2.3. On voit donc que l'on a toujours $\dim(F+G) \leq \dim(F) + \dim(G)$. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$?

C'est si et seulement si $F \cap G = \{0\}$

3 Sommes directes et supplémentaires d'un sous espace vectoriel

3.1 En dimension quelconque

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque (pouvant être infinie).

Définition 3.1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme de F et G est **directe** si et seulement si tout vecteur u de $F+G$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = v + w$ avec $(v,w) \in F \times G$. Dans ce cas, la somme $F+G$ est notée $F \oplus G$.

Exemple 3.2. Reprise des trois cas de figure vus précédemment (paragraphe I) :
Dans $\mathbb{R}^2$, la somme $\text{Vect}\big((1,0)\big) + \text{Vect}\big((0,1)\big)$ est directe.

Dans $\mathbb{R}^3$, la somme $\text{Vect}\big((-1,2,1),(0,1,0)\big) + \text{Vect}\big((1,0,0),(0,0,1)\big)$ n'est pas directe puisque le vecteur $(1,1,1)$ peut s'écrire : $[(0,1,0)] + [(1,0,0)+(0,0,1)]$ ou $[(-1,2,1)-(0,1,0)] + [2(1,0,0)]$.

Dans $\mathbb{R}^3$, la somme $\text{Vect}\big((1,0,1),(0,2,0)\big) + \text{Vect}\big((1,1,1)\big)$ n'est pas directe puisque $(1,1,1) = (1,1,1) = (1,0,1) + 1/2(0,2,0)$.

Théorème 3.3. *La somme $F+G$ est directe $\Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$.*

Démonstration. $\Leftarrow$: Si $u \in F+G$ s'écrit $u = v+w = v'+w'$ avec v et v' vecteurs de F et w et w' vecteurs de G, on peut alors écrire $0 = (v-v') + (w-w')$, donc $v'-v = w-w'$. mais $v'-v \in F$ puisque F est stable par combinaison linéaire, $w-w' \in G$ pour la même raison, donc $v'-v = w-w' \in F \cap G$. Or nous avons $F \cap G = \{0_E\}$ par hypothèse. Donc $v'-v = 0_E$ et $w-w' = 0_E$, ce qui donne bien $v = v'$ et $w = w'$, donc l'unicité recherchée.

$\Rightarrow$: Soit $x \in F \cap G$. On peut écrire $x = x + 0_E = 0_E + x$, en voyant x dans F et 0_E dans G pour la première égalité, et 0_E dans F et x dans G pour la deuxième. Or, par hypothèse, l'écriture de x en une telle somme est unique, on obtient donc $x = 0_E$. Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. Or, comme $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel qui contient donc toujours 0_E, on a bien l'égalité $F \cap G = \{0_E\}$.

□

Définition 3.4. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont deux **sous-espaces vectoriels supplémentaires** de E lorsque tout vecteur u de E s'écrit de manière unique $u = v+w$ avec $(v,w) \in F \times G$, c'est-à-dire lorsque $F \oplus G = E$.

Théorème 3.5. *Caractérisation des sous-espaces supplémentaires*

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $\boxed{E = F \oplus G \ \Leftrightarrow \begin{cases} E = F+G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}}$.

Démonstration. La démonstration est immédiate avec le théorème ci-dessus caractérisant une somme directe pour deux sous-espaces. □

Exemple 3.6. Un grand classique : montrer que $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Montrons d'abord que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$:
Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$ ainsi $M = -M$ et donc $2M = 0$ et $M = 0$.

Montrons ensuite que $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Il est important pour démarrer de bien avoir compris cette notation mathématique : elle signifie que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Voici une indication : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $A = \big(\frac{1}{2}(A + {}^tA)\big) + \big(\frac{1}{2}(A - {}^tA)\big)$. Que peut-on dire de la matrice de la première parenthèse ?(on montre que ceci appartient à $M_n(\mathbb{R})$ en montrons que c'est égal à sa tranposée) et de celle de la seconde ?

(on montre que ceci appartient à $A_n(\mathbb{R})$ en montrons que c'est égal à l'opposé de sa tranposée)

Le raisonnement idéal en exercice consiste en une analyse synthèse : montrons que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $M \in A_n(\mathbb{R})$ tel que $A = M + S$.
Ainsi $A = M + S$ et ${}^tA = {}^tM + {}^tS = -M + S$ et donc $S = \dfrac{A + {}^tA}{2}$ et $M = \dfrac{A - {}^tA}{2}$

Exemple 3.7. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Trouver l'unique matrice symétrique et l'unique matrice antisymétrique dont la somme fasse A.

On trouve $A = \left(\frac{1}{2}(A + {}^tA)\right) + \left(\frac{1}{2}(A - {}^tA)\right) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

3.2 En dimension finie

Théorème 3.8. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de* ***dimension finie***. *Alors, tout sous-espace vectoriel F de E admet au moins un sous-espace supplémentaire G dans E et* $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$.

Démonstration. On a : Soit $\{e_1, ...e_p\}$ une base de F : c'est une famille libre de E donc par le théorème de la base incomplète, elle peut être compléter en une base de E : $\{e_1, ...e_p, e_{p+1}, ..., e_n\}$. Ainsi, en regardant $G = vect(e_{p+1}, ..., e_n)$, on remarque que $F \oplus G = E$. En effet, soit $x \in E$ alors $x = a_1e_1 + ... + a_pe_p + a_{p+1}e_{p+1} + ... + a_ne_n$ avec $a_1e_1 + ... + a_pe_p \in F$ et $a_{p+1}e_{p+1} + ... + a_ne_n \in G$. Et on remarque que par construction $F \cap G = \{0\}$ car : soit $y \in F \cap G$, donc $y = a_1e_1 + ... + a_pe_p$ et $y = b_{p+1}e_{p+1} + ... + b_ne_n$ et ainsi $a_1e_1 + a_pe_p = b_{p+1}e_{p+1} + ... + b_ne_n$ et donc $a_1e_1 + a_pe_p - b_{p+1}e_{p+1} - .... - b_ne_n = 0$ et donc comme la famille $\{e_1, ...e_p, e_{p+1}, ..., e_n\}$ est libre alors $a_1, ...a_n = 0$ et donc $y = 0$.
Ainsi par le th. 3.5, on a bien $F \oplus G = E$.
Il est évident que $dim(G) = dim(E) - dim(F)$ en regardant les bases. □

Exemple 3.9. Dans $\mathbb{R}^2$, donner plusieurs supplémentaires de $F = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$.
On montre que $G = Vect\{(1,0)\}$ et $H = Vect\{(0,1)\}$ sont tous les deux des supplémentaires de F. Il est évident que $F \cap G = \{0\}$ et $F \cap H = \{0\}$.
De plus, soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors $u = y(1,1) + (x-y)(1,0)$ avec $y(1,1) \in F$ et $(x-y)(1,0) \in G$ et donc $\mathbb{R}^2 = F + G$. Et donc $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.
De même, soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors $u = x(1,1) + (y-x)(0,1)$ avec $y(1,1) \in F$ et $(y-x)(0,1) \in H$ et donc $\mathbb{R}^2 = F + H$. Et donc $\mathbb{R}^2 = F \oplus H$.

Théorème 3.10. *Première caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie.*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

$$\boxed{E = F \oplus G \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}}.$$

Démonstration. Supposons que $E = F \oplus G$. Alors par le th. précédent, $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$. Mais alors par la formule de Grassman, $dim(E) = dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = dim(F) + dim(G)$.
Supposons maintenant que $dim(E) = dim(F) + dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
Alors la somme $F \oplus G$ est directe.
De plus, $F + G$ est un sev de E et $dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = dim(F) + dim(G) = dim(E)$ et donc $F + G = E$. □

Exemple 3.11.
— Dans $\mathbb{R}^3$, deux plans vectoriels ne peuvent pas être supplémentaires. Pourquoi ? Car la somme des dimensions fait 4 et pas 3.

— Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y+3z = 0\}$
$F = \{(x,x,x) | x \in \mathbb{R}\} = vect(1,1,1)$ et $G = \{(-2y-3z, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y,z \in \mathbb{R}\} = vect\{(-2,1,0),(-3,0,1)\}$
On vérifie que les vecteurs forment bien des bases des espaces considérées.
Ainsi $dim(F) + dim(G) = 1 + 2 = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$.
De plus, $F \cap G = \{0\}$ car si $u = (x,y,z) \in F \cap G$ alors $x = y = z$ et $x+2y+3z = 0$ et donc $6x = 0$ et donc $x = y = z = 0$ et $u = 0$.

Théorème 3.12. *Seconde caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F_1 et F_2 deux s.e.v. de E de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

$E = F \oplus G \Leftrightarrow$ la famille obtenue par "concaténation" des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de E.

La "concaténation" des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ signifie que l'on forme une nouvelle famille en "mettant bout à bout" les deux familles $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Démonstration. Supposons que la famille obtenue par "concaténation" des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de E. Alors par définition d'une base, $dim(F) + dim(G) = dim(E)$. De plus, $F \cap G = \{0\}$ car : soit $u \in F \cap G$ alors si on note $B_1 = \{e_1, ..., e_p\}$ et $B_2 = \{f_1, ..., f_q\}$ alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p$ et $\alpha_1, ..., \alpha_q \in \mathbb{R}$, tels que $u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k$ donc $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k = 0$ mais comme $B = \{e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_q\}$ est une base de E donc libre alors : $\lambda_1 = ... = \lambda_p = -\alpha_1 = ... = -\alpha_q = 0$ et donc $u = 0$.
Réciproquement, supposons que $E = F \oplus G$ alors $dim(E) = dim(F) + dim(G)$ et donc la famille B obtenu par concaténation des bases B_1 et B_2 respecte : $card(B) = card(B_1) + card(B_2) = dim(F) + dim(F) = dim(E)$.
Il reste juste à montrer qu'elle est génératrice :
Soit $x \in E$, alors il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. Mais alors (avec les mêmes notations que ci-dessus) il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p, \alpha_1, ..., \alpha_q \in \mathbb{R}$ tels que $y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k$ et $z = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k$ et donc x est CL de la famille B, d'où le résultat. □

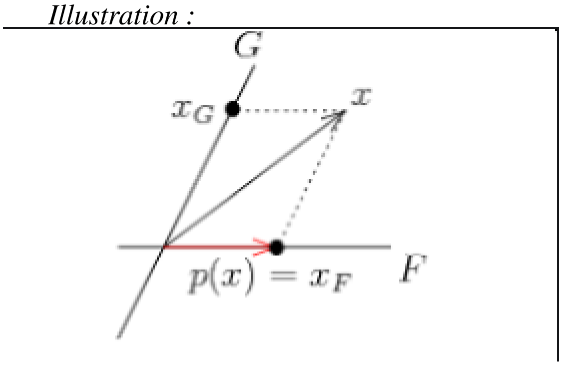
Exemple 3.13. Seconde façon de montrer que dans $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$ et
$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y+3z = 0\}$ sont supplémentaires.
Il suffit de voir que $\{(1,1,1),(-2,1,0),(-3,0,1)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ (faites le vous même)

4 Projecteurs

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ou infinie.

Définition 4.1. Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Alors, tout vecteur x de E s'écrit de façon unique $x = x_F + x_G$ avec $(f,g) \in F \times G$. On appelle projecteur sur F de direction G l'application $p : x \in E \mapsto x_F \in E$. On dit aussi que p est le projecteur sur F parallèlement à G.

Illustration :



Remarque 4.2. On définit de même le projecteur sur G de direction F, c'est l'application $q : x \in E \mapsto g \in E$.
Ces deux projecteurs sont appelés "projecteurs associés aux deux sous-espaces supplémentaires F et G".

Proposition 4.3. *On a alors $p+q=Id_E$, $p\circ q=0=q\circ p$.*

Démonstration. Soit $x\in E$ alors $x=x_F+x_G=p(x)+q(x)$ et donc $p+q=Id_E$.
Soit $x\in E$ alors $p(q(x))=0$ car $q(x)\in G$ et donc $q(x)=0+q(x)$ avec $0\in F$ et $q(x)\in G$. Donc $p\circ q=0$
De même $0=q\circ p$. $\square$

Exemple 4.4.

— Soit $E=\mathbb{R}^2$. On pose $F=\text{Vect}\big((1,1)\big)$ et $G=\text{Vect}\big((-1,1)\big)$. On a bien F et G qui sont supplémentaires dans E (sauriez-vous le justifier ?).
Calculer $p\big((x,y)\big)$ pour tout vecteur (x,y) de E, si p est le projecteur sur F de direction G. Donner également $q\big((x,y)\big)$ où q est le projecteur sur G de direction F.
Donnons d'abord la décomposition de (x,y) sur la somme $F+G$: $(x,y)=a(1,1)+b(-1,1)$ ssi $x=a-b$ et $y=a+b$ ssi $a=\dfrac{x+y}{2}$ et $b=\dfrac{y-x}{2}$
Ainsi $(x,y)=\dfrac{x+y}{2}(1,1)+\dfrac{y-x}{2}(-1,1)$ et donc $p(x,y)=\dfrac{x+y}{2}(1,1)$ et $q(x,y)=\dfrac{y-x}{2}(-1,1)$.

— Dans $M_2(\mathbb{R})$, on note p le projecteur sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$. Calculer $p(A)$ où $A=\begin{pmatrix}-2&0\\4&-1\end{pmatrix}$.
Comme vu dans l'exemple 3.7, $A=\begin{pmatrix}-2&2\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix}-2&2\\2&-1\end{pmatrix}\in S_2(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}\in A_2(\mathbb{R})$. Ainsi $p(A)=\begin{pmatrix}-2&2\\2&-1\end{pmatrix}$.

Proposition 4.5. *Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors*
— *p est un endomorphisme de E.*
— *$p\circ p=p$.*
— *$Ker(p)=G$.*
— *$Im(p)=\{x\in E\,|\,p(x)=x\}=Ker(p-Id_E)=F$.*

Démonstration. Soit $x,x'\in E$, $\lambda\in\mathbb{R}$, alors il existe $y,y'\in F$ et $z,z'\in G$ tels que $x=y+z$ et $x'=y'+z'$ et donc $x+\lambda x'=y+z+\lambda y'+\lambda z'=\underbrace{y+\lambda y'}_{\in F}+\underbrace{z+\lambda z'}_{\in G}$ et donc $p(x+\lambda x')=y+\lambda y'=p(x)+\lambda p(x')$. Ainsi p est linéaire, et comme pour tout $x\in E$, $p(x)\in F\subset E$ alors p est une endomorphisme.

Soit $x\in E$, comme $p(x)\in F$ alors $p(p(x))=p(x)$ $(p(x)=\underbrace{p(x)}_{\in F}+\underbrace{0}_{\in G})$. Donc $p\circ p=p$.

Pour tout $z\in G$, comme $z=\underbrace{0}_{\in F}+\underbrace{z}_{\in G}$ donc $p(z)=0$ et donc $G\subset Ker(p)$. De plus, soit $z\in Ker(p)$ alors $p(z)=0$. Comme $z\in E$ alors il existe z_1,z_2 tel que $z=\underbrace{z_1}_{\in F}+\underbrace{z_2}_{\in G}$ et donc $0=p(z)=z_1$ et donc $z=\underbrace{z_2}_{\in G}$. Ainsi par double inclusion, $G=Ker(p)$.

On remarque que $\{x\in E\,|\,p(x)=x\}=\{x\in E\,|\,p(x)-x=0\}=\{x\in E\,|\,(p-Id_E)(x)=0\}=Ker(p-Id_E)$.
De plus, $Im(p)=\{x\in E\,|\,p(x)=x\}$ par double inclusion :
Soit $y\in Im(p)$ alors il existe $z\in E$ tel que $y=p(z)$ et donc $p(y)=p(p(z))=p(z)=y$ par le point 2. ainsi $y\in\{x\in E\,|\,p(x)=x\}$.
Soit $y\in\{x\in E\,|\,p(x)=x\}$ alors $p(y)=y$ ainsi $y\in Im(p)$. Conclusion : $Im(p)=\{x\in E\,|\,p(x)=x\}$
Enfin, $Im(p)=F$ par double inclusion :
Soit $x\in Im(p)$ alors $x\in F$ par définition de p.
Soit $x\in F$ alors comme $x=\underbrace{x}_{\in F}+\underbrace{0}_{\in G}$, $p(x)=x$ et donc $x\in Im(p)$. Conclusion : $Im(p)=F$ $\square$

4.1 Caractérisation des projecteurs

Théorème 4.6. *: Soit p un endomorphisme de E. Si p vérifie $p \circ p = p$, alors $Ker(p) \oplus Im(p) = E$, et p est le projecteur sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$. Finalement, un projecteur est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$. Ainsi, si une matrice vérifie $A^2 = A$, c'est la matrice d'un projecteur.*

Démonstration. Soit p un endomorphisme tel que $p \circ p = p$.
Alors montrons que $Ker(p) \oplus Im(p) = E$:
On remarque facilement que $Ker(p) \cap Im(p) = \{0\}$ (soit $x \in Ker(p) \cap Im(p)$ alors il existe $y \in E$ tel que $x = p(y) = p(p(y)) = p(x) = 0$).
De plus, pour tout $x \in E$, $x = p(x) + x - p(x)$ où $p(x) \in Im(p)$ et $x - p(x) \in Ker(p)$ car $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = 0$.
Ainsi $Ker(p) + Im(p) = E$.
On a donc montré que $Ker(p) \oplus Im(p) = E$.
Ainsi, comme pour tout $x \in E$, $x = \underbrace{p(x)}_{\in Im(p)} + \underbrace{x - p(x)}_{\in Ker(p)}$, alors p est bien un projecteur sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$. □

Exemple 4.7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f((x,y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$ pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est un projecteur que l'on précisera.
La méthode est de vérifier que $f^2 = f$ et ensuite on remarque que f est donc le projecteur sur $Im(f)$ parallèlement à $Ker(f)$ et donc on cherche $Im(f)$ et $Ker(f)$.

5 Généralisation de la notion de somme directe

5.1 Définitions

Définition 5.1. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E (avec $n \geq 2$). On dit que la somme $F = F_1 + \cdots + F_n$ est directe lorsque tout vecteur de $u \in F$ s'écrit de façon unique en une somme $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $u_i \in F_i$.
Dans ce cas, on note $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Exemple 5.2.
- Dans $\mathbb{R}^3$, la somme $F = \text{Vect}\big((1,1,1)\big) + \text{Vect}\big((0,1,1)\big) + \text{Vect}\big((1,0,0)\big)$ n'est pas directe :
  En effet, $(1,1,1) = (1,1,1) + 0(0,1,1) + 0(1,0,0)$ et $(1,1,1) = 0(1,1,1) + (0,1,1) + (1,0,0)$ et donc on dispose de 2 écriture de $(1,1,1)$.
- Dans $\mathbb{R}^4$, la somme $F = \text{Vect}\big((1,1,1,1)\big) + \text{Vect}\big((0,1,1,1)\big) + \text{Vect}\big((0,0,0,1)\big)$ est directe :
  On montre que l'écriture d'une élément de F est unique : soit a,b,c et a',b',c' tel que $a(1,1,1,1) + b(0,1,1,1) + c(0,0,0,1) = a'(1,1,1,1) + b'(0,1,1,1) + c'(0,0,0,1)$: on résout le système et on montre que $a = a'$ et $b = b'$ et $c = c'$, ainsi l'écriture est unique.

Remarque 5.3. Attention : il n'existe pas de caractérisation simple du fait qu'une somme est directe lorsqu'on a plus de 2 sous-espaces vectoriels. Si la somme $F + G + H$ est directe alors on a : $F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{0\}$ mais la réciproque est FAUSSE : comme on peut le voir avec le point 1 de l'exemple 5.2.

Définition 5.4. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E (avec $n \geq 2$). On dit que E est somme directe de $F_1, F_2, \cdots, F_n$ lorsque $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$ (on dit aussi que $F_1, \dots, F_n$ sont supplémentaires dans E).

Exemple 5.5. Comme la famille $\big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a clairement

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\big((1,1,1)\big) \oplus \text{Vect}\big((0,1,1)\big) \oplus \text{Vect}\big((0,0,1)\big)$$

5.2 Caractérisation en dimension finie

Théorème 5.6. *(admis)Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E de bases respectives $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$.*

$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n \Leftrightarrow$ la famille obtenue par "concaténation" des bases $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$ est une base de E.

La "concaténation" des bases $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$ signifie que l'on forme une nouvelle famille en "mettant bout à bout" les n familles $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$.

Exemple 5.7. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $F_1 = \mathrm{Vect}\big((1,1,1,1)\big)$, $F_2 = \mathrm{Vect}\big((1,0,0,1)\big)$, $F_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+z+t = 0 \quad \text{et} \quad x-y+3z-t = 0\}$.

Montrer que $\mathbb{R}^4$ est somme directe de F_1, F_2 et F_3.

On trouve une base de F_1, de F_2 et de F_3 puis on montre que la concaténation des trois bases forment une base de $\mathbb{R}^4$.

Proposition 5.8. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Si la somme $F = F_1 + \cdots + F_n$ est directe, alors on a :*

$$\boxed{\dim(F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n) = \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_n)}$$

Démonstration. Direct par le théorème précédent. Attention, il n'y a pas de réciproque ! □