Chapitre 17 : Espaces vectoriels, généralités

Différents ensembles ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, suites réelles, polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, ...) sont munis d'opérations ayant les mêmes règles de calcul. Ils sont tous munis de la même structure algébrique qu'on appelle structure d'**espace vectoriel**.

1 Définition et exemples

1.1 Définition

Axiomatique d'un espace vectoriel

Définition 1.1. Soit E un ensemble. Les éléments de E seront appelés des vecteurs. On dit que E est muni d'une structure d'**espace vectoriel sur** $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}$**-espace vectoriel** si E est muni d'une addition interne $+$ (c'est à dire d'une application $(x,y) \in E^2 \mapsto x+y \in E$) et d'une multiplication externe notée . (c'est à dire d'une application $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \mapsto \lambda.x \in E$) vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall (x,y) \in E^2$, $x+y = y+x$, autrement dit la loi $+$ est commutative.
2. $\forall (x,y,z) \in E^3$, $x+(y+z) = (x+y)+z$, autrement dit la loi $+$ est associative.
3. Il existe un élément neutre, le vecteur nul, noté 0_E vérifiant $\forall x \in E$, $x+0_E = 0_E + x = x$.
4. Tout vecteur x de E admet un opposé : $\forall x \in E$, $\exists x' \in E \,|\, x+x' = x'+x = 0_E$. On note $-x$ pour x'.
5. La loi . est distributive à gauche par rapport à l'addition $+$ de E : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $\lambda.(x+y) = (\lambda.x)+(\lambda.y)$.
6. La loi . est distributive à droite par rapport à l'addition $+$ de $\mathbb{R}$: $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda+\mu).x = (\lambda.x)+(\mu.x)$.
7. La loi . est associative par rapport à la multiplication de $\mathbb{R}$: $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda \times \mu).x = \lambda.(\mu.x)$.
8. $\forall x \in E$, $1.x = x$ (en notant 1 l'élément unité de $\mathbb{R}$).

Remarque 1.2. En abrégé, on écrit souvent "E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel". Parfois, on spécifie aussi les opérations lorsque ce tombe pas sous le sens.
En géométrie, on note usuellement $\vec{x}$ pour désigner le vecteur x. On peut le faire aussi en algèbre linéaire, mais pour simplifier l'écriture, on omet généralement la flèche.
On remarque également qu'il n'est jamais demandé la présence d'une multiplication interne (celle ci est dans la définition d'autre structure comme des anneaux ou des algèbres).
Attention à ne pas confondre le $0 \in \mathbb{R}$ des scalaires et 0_E qui est le neutre de E pour la loi interne. Nous verrons des exemples de neutres ci dessous.
Le symbole . de la multiplication externe est souvent omis : $2.A = 2A$ par exemple.

1.2 Espaces vectoriels de référence

1. **Le** $\mathbb{R}$**-espace vectoriel** $\mathbb{R}^n$ **pour** $n \in \mathbb{N}^*$.

   $\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) | \forall i \in [\![1,n]\!], x_i \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathbb{R}$. On définit l'addition interne par : pour tout $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, pour tout $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$,

   $$\boxed{x+y = (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)}$$

   On définit la multiplication externe par : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

   $$\boxed{\lambda.x = \lambda.(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (\lambda \times x_1, \lambda \times x_2, \ldots, \lambda \times x_n)}$$

   Les 8 axiomes qui définissent un espace vectoriel sont bien vérifiées, suite aux propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Nous démontrerons le cas $n=2$ et nous nous convaincrons sans difficulté que la démonstration

peut être étendu à n entier naturel quelconque.
Les vecteurs sont des n-uplets. Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est le n-uplet $(0,0,\dots,0)$, de plus l'opposée de $(x_1,...,x_n)$ est $(-x_1,...,-x_n)$.
Pour $n=2$, on retrouve la structure d'espace vectoriel du plan que l'on utilise en géométrie plane, et pour $n=3$ celle de la géométrie dans l'espace.
Pour $n=1$, on a un cas très particulier : $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Vecteurs et scalaires sont confondus, l'addition interne est l'addition de $\mathbb{R}$, et la multiplication externe est la multiplication de $\mathbb{R}$.

Démonstration. (Dans le cas $n=2$) On vérifie les 8 axiomes :
1) Soit $(X,Y)\in(\mathbb{R}^2)^2$, avec $X=(x,x')\in\mathbb{R}^2$ et $Y=(y,y')\in\mathbb{R}^2$.
$X+Y=(x,x')+(y,y')=(x+y,x'+y')=(y+x,y'+x')=(y,y')+(x,x')=Y+X$. 2) Soit $(X,Y,Z)\in(\mathbb{R}^2)^3$, avec $X=(x,x')\in\mathbb{R}^2$, $Y=(y,y')\in\mathbb{R}^2$ et $Z=(z,z')\in\mathbb{R}^2$.
$X+(Y+Z)=(x,x')+((y,y')+(z,z'))=(x,x')+(y+z,y'+z')=(x+(y+z),x'+(y'+z'))=((x+y)+z,(x'+y')+z')=(x+y,x'+y')+(z,z')=((x,x')+(y,y'))+(z,z')=(X+Y)+Z$.
3) Il s'agit de $(0,0)$ car pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x,y)+(0,0)=(x+0,y+0)=(x,y)=(0,0)+(x,y)$.
4)Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ alors X possède un opposé qui est $(-x,-y)\in\mathbb{R}^2$:
$(x,y)+(-x,-y)=(0,0)=(-x,-y)+(x,y)$.
5) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, soit $X=(x,y),Y=(x',y')\in(\mathbb{R}^2)^2$ alors : $\lambda(X+Y)=\lambda(x+y,x'+y')=(\lambda(x+x'),\lambda(y+y'))=(\lambda x+\lambda x'),\lambda y+\lambda y'))=(\lambda x,\lambda y)+(\lambda x',\lambda y')=\lambda(x,y)+\lambda(x',y')=\lambda X+\lambda Y$. 6) Même raisonnement. 7) Même raisonnement. 8) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $1(x,y)=(1x,1y)=(x,y)$.

□

2. **$\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.**

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est muni d'une addition interne et d'une multiplication externe définies par $\forall(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, si $P=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$ et $Q=b_0+b_1X+\dots b_nX^n$ (quitte à rajouter des zéros, on peut toujours supposer que les coefficients de P et Q vont jusqu'à la même puissance), alors

$$\boxed{(P+Q)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+\cdots+(a_n+b_n)X^n}$$

$$\boxed{(\lambda.P)=(\lambda\times a_0)+(\lambda\times a_1)X+\cdots+(\lambda\times a_n)X^n}$$

$\mathbb{R}[X]$ muni de ces deux opérations est alors un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (on vérifie directement les 8 axiomes).

Les vecteurs sont des polynômes. Le vecteur nul est le polynôme nul, et l'opposé du polynôme P est $-P$ (avec des coefficients opposés à ceux de P) (en effet $P+(-P)=0_{\mathbb{R}[X]}$).
Remarque 1.3. On remarque que dans ce cas précis, il y a aussi une multiplication interne entre polynômes, mais celle ci n'est pas nécessaire à la définition d'un espace vectoriel.

3. **Si $D\subset\mathbb{R}$ est non vide, $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, l'ensemble des applications définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.**

Il est muni d'une addition interne et d'une multiplication externe définies par $\forall(f,g)\in\mathcal{F}(D,\mathbb{R})^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{\forall x\in D,\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)}\ \text{et}\ \boxed{\forall x\in D,\ (\lambda.f)(x)=\lambda\times f(x)}$$

Les 8 axiomes sont facilement vérifiés.
Les vecteurs sont des fonctions. Le vecteur nul est la fonction définie sur D constante égale à 0, que l'on appelle la fonction nulle.

Remarque 1.4. On remarque ici aussi la présence d'une multiplication interne, mais également celle d'une autre opération interne : la composée. De même, celles-ci ne sont pas nécessaires à la définition d'un espace vectoriel.

Attention : Il faut diffŕencier l'opération d'addition réelle et celle des fonctions que l'on note identiquement. Par exemple, $f(x)+g(x)$ est une somme de réelle et $f+g$ est une somme de fonctions. La distinction entre f et $f(x)$ est importante : en effet $f=g$ est équivalent à $f(x)=g(x)$ pour tout $x\in D$. Cette remarque est également valable pour les polynômes.

Remarque 1.5. Que dire de $\mathcal{F}(D,I)$ si $I \neq \mathbb{R}$?

Cas particulier :
Si $D = \mathbb{N}$, alors $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel lorsqu'on le muni de l'addition interne et de la multiplication externe définies par $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\forall (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (u+v)_n = u_n + v_n} \text{ et } \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda.u)_n = \lambda \times u_n}$$

Les vecteurs sont des suites. **Le vecteur nul est la suite nulle**.

4. **$M_{n,p}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel**.
   L'addition est la somme de deux matrices, et la multiplication externe est la multiplication d'une matrice par un scalaire, qui ont été définies dans le chapitre "calcul matriciel". Les 8 axiomes sont facilement vérifiés.

   Remarque 1.6. La remarque sur la présence d'une multiplication interne est valable aussi ici.

   Les vecteurs sont des matrices. **Le vecteur nul est la matrice nulle**.

5. **Un espace vectoriel ne peut pas être vide, mais peut ne contenir que le neutre 0_E**

1.3 Quelques propriétés

Proposition 1.7. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, on a : $\lambda x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$ ou $\lambda = 0$*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. On suppose que $\lambda x = 0_E$. Supposons que $\lambda \neq 0$.
On utilise (un peu en avance) la proposition 1.8, avec le second point.
Ainsi $\frac{1}{\lambda}(\lambda x) = (\frac{1}{\lambda}\lambda)x = x = \frac{1}{\lambda}0_E = 0_E$.
Ainsi si $\lambda x = 0_E$ alors soit $x = 0_E$ soit $\lambda = 0$. □

Retenir : la règle du produit nul est valable (attention, pour la multiplication externe, on rappelle qu'il n'y a pas nécessairement de multiplication interne dans un ev, et que celle ci n'a pas de raison de respecter le produit nul).

Proposition 1.8. *Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On a alors :*

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.0_E = 0_E$.
2. $\forall u \in E$, $0.u = 0_E$.
3. $\forall u \in E$, $(-1).u = -u$.
4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in E$: $\begin{cases} si\ \lambda \neq 0 & alors \quad \lambda u = \lambda v \Rightarrow u = v \\ si\ u \neq 0 & alors \quad \lambda u = \mu u \Rightarrow \lambda = \mu \end{cases}$

Démonstration. (on veillera à montrer les 2 premiers points sans utiliser la proposition 1.7 pour ne pas faire de boucle dans le raisonnement).
1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda.0_E + \lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E$ (car $0_E + x = x$ pour tout $x \in E$).
Ainsi en utilisant l'opposée de $\lambda.0_E$ qui est $-\lambda.0_E$:
$-\lambda.0_E + \lambda.0_E + \lambda.0_E = \lambda.0_E - \lambda.0_E$ c'est à dire $\lambda.0_E = 0_E$.
2) Soit $u \in E$, $0.u + 0.u = (0+0).u = 0.u$ donc avec l'opposée de $0.u$ qui est $-0.u$:
$0.u + 0.u - 0.u = 0.u - 0.u$ c'est à dire $0.u = 0_E$
3) Soit $u \in E$, $(-1).u + u = (-1+1).u = 0.u = 0_E$ et donc $(-1).u = -u$.
4) Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in E$: suppososn qe $\lambda \neq 0$ alors si $\lambda.u = \lambda.v$ alors $\lambda(u-v) = 0$ et comme $\lambda \neq 0$ alors $u - v = 0$ et donc $u = v$.
De même pour le suivant. □

1.4 Combinaison linéaire de vecteurs

Dans un espace vectoriel, on peut faire des combinaisons linéaires de vecteurs.

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un vecteur x de E est **combinaison linéaire** des n vecteurs x_1, x_2, ..., x_n de E si $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2 + \cdots + \lambda_n.x_n$.

Exemples : Non corrigé.

1. Donner des combinaisons linéaires $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

2. Tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de $(1,0)$ et $(0,1)$.

3. Est ce que $(1,2,3)$ est combinaison linéaire de $(-1,1,2)$ et $(-1,0,1)$?

4. Montrer que le polynôme $X^2 - 2$ de $\mathbb{R}[X]$ est combinaison linéaire de $X^2 + X + 1$ et de $X + 3$.

5. Si on dit d'une matrice carrée 2x2 qu'elle est combinaison linéaire de I, qu'est-ce que ça veut dire ?

6. Montrer que la fonction cos de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas combinaison linéaire des fonctions sin et $Id_{\mathbb{R}}$.

7. Soit E un espace vectoriel quelconque, alors 0_E est combinaison linéaire de n'importe quel élément de E.

2 Sous espaces vectoriels

2.1 Définition

Définition 2.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel F de E est une partie de E contenant le vecteur nul, stable pour l'addition interne, c'est à dire $\forall(x,y) \in F^2$, $x + y \in F$ et stable pour la multiplication externe, c'est à dire $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in F$, $\lambda.x \in F$.

autrement dit : on a la proposition suivante

Caractérisation des sev

Proposition 2.2. *F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E si et seulement si*

— $0_E \in F$

— *F est* **stable par combinaison linéaire** *:* $\forall(x,y) \in F^2$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.x + y \in F$.

Donnons de nombreux exemples :

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, faire un schéma permettant de visualiser les sous-ensembles suivants puis dire lesquels sont des sous-espace vectoriels de E.
   Non fait ici

2. Démontrer ces résultats.
   $F_1 = \{(a,b) \in E, a+3b=0\}$ $\qquad$ $F_2 = \{(a,b) \in E, b=a^2\}$ F_1 est un sev de $\mathbb{R}^2$ car $(0,0) \in F_1$ car $0+30=0$, et aussi car :
   Soit $(x,y),(x',y') \in F_2$ (ainsi $x+3y=0$ et $x'+3y'=0$) et $\lambda \in \mathbb{R}$:
   $(x,y)+\lambda(x',y') = (x+\lambda x', y+\lambda y') \in F_2$, car $x+\lambda x'+3(y+\lambda y') = x+3y+\lambda(x'+3y') = 0+0=0$.
   F_2 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$ car $(1,1),(0,0) \in F_2$ mais $2(1,1)+(0,0) = (2,2) \notin F_2$
   D'ailleurs, si l'on muni F_2 des lois de $\mathbb{R}^2$ alors F_2 ne peut pas être un ev car la loi . (externe) n'est pas à valeurs dans F_2.
3. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, montrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, mais pas F_3 :
   $F_1 = \{P \in E, P(3)=0\}$ $\qquad$ $F_2 = \{P \in E, \deg(P) \leq 4\}$ $\qquad$ $F_3 = \{P \in E, \deg(P)=4\}$
   F_3 n'est pas un sev de $\mathbb{R}[X]$ car $0_{\mathbb{R}[X]} \notin F_3$ car $deg(0_{\mathbb{R}[X]}) = -\infty \neq 4$.
   F_1 est un sev de $\mathbb{R}[X]$ car $0_{\mathbb{R}[X]} \in F_1$, car $0_{\mathbb{R}[X]}(3) = 0$, ainsi que car :
   Soit $P,Q \in F_1$ (donc $P(3)=0$ et $Q(3)=0$) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $P+\lambda Q \in F_1$ car $(P+\lambda Q)(3) = P(3)+\lambda Q(3) = 0+\lambda 0 = 0$.
   F_2 est un sev de $\mathbb{R}[X]$ car $0_{\mathbb{R}[X]} \in F_2$, car $deg(0_{\mathbb{R}[X]}) = -\infty \leqslant 4$, ainsi que car :
   Soit $P,Q \in F_2$ (donc $deg(P) \leqslant 4$ et $deg(Q) \leqslant 4$) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $P+\lambda Q \in F_2$ car $deg(P+\lambda Q) \leqslant max(deg(P), deg(\lambda Q)) \leqslant 4$.

4. Dans $E = M_n(\mathbb{R})$, les sous-ensembles $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ (matrices diagonales), $\mathcal{T}_n^S(\mathbb{R})$ (matrices triangulaires supérieures) et $\mathcal{T}_n^I(\mathbb{R})$ (matrices triangulaires inférieures) sont des sous-espaces vectoriels de E.
5. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que le sous-ensemble des fonctions impaires est un sous-espace vectoriel de E.
   $O_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est une fonction impaire car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}(-x) = 0 = -0 = -0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}(x)$.
   De plus, soit f et g deux fonctions impaires, et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Ainsi $f+\lambda g$ est une fonction impaire car $(f+\lambda g)(-x) = f(-x)+\lambda g(-x) = -f(x)-\lambda g(x) = -(f+\lambda g)(x)$.
6. Soit $u \in E*$ où E est un espace vectoriel ($E*$ désigne $E \setminus \{0_E\}$. Alors $D_u = \{t.u | t \in \mathbb{R}\}$ (la droite engendrée par u) est une sous espace vectoriel de E.
   En effet : $0_E \in D_u$ car $0_E = 0.u$.
   De plus, soit $x,y \in D_u$ (alors il existe $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u$ et $y = \beta u$) etsoit $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $x+\alpha y = \lambda.u + \alpha\beta.u = (\lambda+\alpha\beta).u \in D_u$.
7. Le lecteur justifiera que l'ensemble des application continue de I vers $\mathbb{R}$ est un sev de $F(I,\mathbb{R})$. De même pour les fonctions dérivables.

L'intérêt de cette notion est que l'on obtient de nouveaux espaces vectoriels :

Un sev est un ev

Proposition 2.3. *Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Proposition 2.4. *Une **intersection de deux sous-espaces vectoriels** d'un espace vectoriel E est **encore un sous-espace vectoriel** de E.*

Démonstration. Soit F et G deux sev de E, montrons que $F \cap G$ est encore un sev de E.
$0_E \in F \cap G$ car $0_E \in F$ car F sev de E et $0_E \in G$ car G sev de E.
Soit $x,y \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $x+\lambda y \in F \cap G$ car $x,y \in F$ et F est un sev de E (donc $x+\lambda y \in F$), de même pour "$x+\lambda y \in F$". $\square$

Remarque 2.5. Une union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E. Voici un contre-exemple :

On considère : $F=\{\lambda(1,1)\ tel\ que\ \lambda\in\mathbb{R}\}=\{(\lambda,\lambda)\ tel\ que\ \lambda\in\mathbb{R}\}$ et $G=\{\lambda(0,1)\ tel\ que\ \lambda\in\mathbb{R}\}=\{(0,\lambda)\ tel\ que\ \lambda\in\mathbb{R}\}$
Alors justifions que $F\cup G$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.
En effet, $(1,1)\in F\cup G$ et $(0,1)\in F\cup G$ mais $(1,1)+(0,1)=(2,1)$ n'appartient ni à F ni à G.

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Sous-espace-vectoriel-engendré

Proposition 2.6. *Etant donnés des vecteurs $x_1,x_2,\cdots,x_n$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, la notation* $\mathrm{Vect}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ *désigne l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1,x_2,\cdots,x_n$.*

$\mathrm{Vect}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ *est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle "sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$".*

Démonstration. On remarque que $u\in Vect(x_1,...,x_n)$ ssi il existe $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tel que $u=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$.
$0_E\in Vect(x_1,...,x_n)$ car $0_E=\sum_{k=1}^{n}0x_k$.
Soit $u,v\in Vect(x_1,...,x_n)$, ainsi il existe $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que $u=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$ et il existe $\lambda'_1,...,\lambda'_n\in\mathbb{R}$ tels que $v=\sum_{k=1}^{n}\lambda'_k x_k$.
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Ainsi $u+\lambda v=\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k+\alpha\lambda'_k)x_k$ et donc $u+\lambda v\in Vect(x_1,...,x_n)$. □

Exemple 2.7.
1. Dans $\mathbb{R}^3$, décrire ce qu'est $\mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$. Idem pour $\mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$.
   $X\in\mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ ssi il existe $x,y,z\in\mathbb{R}$ tels que $X=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)=(x,y,z)$.
   Ainsi $X\in\mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ si et seulement si $X\in\mathbb{R}^3$. Ainsi $\mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)=\mathbb{R}^3$.
   De même, on trouve que $\mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)=\{(x,y,0)\ tel que\ x,y\in\mathbb{R}\}$.
2. On considère l'ensemble F des éléments de $\mathbb{R}^3$ solutions de $\begin{cases}x+y-z&=&0\\2x-y+z&=&0\end{cases}$
   $0_{\mathbb{R}^3}\in F$ car $(0,0,0)$ est solution de $x+y-z=0$ et $2x-y+z=0$.
   De plus, soit $X=(a,b,c),Y=(a',b',c')\in F$ (ainsi : $\begin{cases}a+b-c&=&0\ et\\2a-b+c&=&0\end{cases}$ et $\begin{cases}a'+b'-c'&=&0\ et\\2a'-b'+c'&=&0\end{cases}$) et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.
   Montrons que $X+\lambda Y\in F$: $X+\lambda Y=(a+\lambda a',b+\lambda b',c+\lambda c')$ et :
   $(a+\lambda a')+(b+\lambda b')-(c+\lambda c')=a+b-c+\lambda(a'+b'-c')=0$ et $2(a+\lambda a')-(b+\lambda b')+(c+\lambda c')=2a-b+c+\lambda(2a'-b'+c')=0$
   Ainsi $X+\lambda Y\in F$ et donc F est un sev de $\mathbb{R}^3$.
   Soit $X\in\mathbb{R}^3$. $X\in F$ si et seulement si il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tel que $X=(a,b,c)$ et $\begin{cases}a+b-c&=&0\\2a-b+c&=&0\end{cases}$ si et seulement si il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tel que $X=(a,b,c)$ et $\begin{cases}a+b-c&=&0\\-3b+3c&=&0\end{cases}$ ssi il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tel que $X=(a,b,c)$ et $\begin{cases}a&=&0\\b&=&c\end{cases}$ si et seulement il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $X=(0,b,b)=b(0,1,1)$ si et seulement si $X\in Vect((0,1,1))$.
   Ainsi $F=Vect((0,1,1))$. Faire de même avec $x-3y+z=0$ (on montrera que c'est un Vect et on en déduira que c'est un ev)
   Soit $X\in\mathbb{R}^3$. $X\in F$ si et seulement si il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tel que $X=(a,b,c)$ et $a-3b+c=0$ si et seulement si il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tel que $X=(a,b,c)$ et $a=3b-c$ ssi il existe $b,c\in\mathbb{R}$ tel que $X=(3b-c,b,c)=b(3,1,0)+c(-1,0,1)$ si et seulement si $X\in Vect((3,1,0),(-1,0,1))$.
   Ainsi $F=Vect((3,1,0),(-1,0,1))$. Ainsi F est un sev de $\mathbb{R}^3$. Que dire du cas $x+2y-z=1$? $0_{\mathbb{R}^3}\notin F$ et donc F n'est pas un sev de R^3.
3. Écrire l'ensemble $F=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-3u_{n+1}+2u_n=0\}$ sous forme de Vect : en déduire qu'il s'agit d'un espace vectoriel.
   Soit $(v_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   $(v_n)_n\in F$ si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+2}-3v_{n+1}+2v_n=0$.

Or par le th. sur les suites récurrentes d'ordre 2, et car $x^2-3x+2=0$ a pour solution 1 et 2 alors :
$(v_n)_n \in F$ si et seulement si il existe $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda 1^n + \beta 2^n = \lambda + \beta 2^n$ si et seulement si qu'il existe $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$ tel que $(v_n)_n = \lambda(1)_n + \beta(2^n)_n$ si et seulement si $(v_n)_n \in Vect((1)_n,(2^n)_n)$.

4. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décrire le sous-espace vectoriel engendré par la suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Il s'agit de l'ensemble des suites $(u_n)_n$ tel que il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda 2^n$. Il s'agit exactement des suites géométriques de raison 2.

5. Supposons que nous voulons montrer que $F = \{(a+b,a,b-a),(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On écrit alors :
   $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b,a,b-a) = a(1,1,-1)+b(1,0,1)$ et donc $\{(a+b,a,b-a),(a,b)\in\mathbb{R}^2\} = Vect((1,1,-1),(1,0,1))$

6. Montrer de la même manière que l'ensemble F des matrices du type $\begin{pmatrix} a & a+b & b \\ a-2b & c & 2c \end{pmatrix}$ où a,b,c sont des réels forme un sous-espace vectoriel de $M_{2,3}(\mathbb{R})$.
   $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a & a+b & b \\ a-2b & c & 2c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   Ainsi $F = Vect(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix})$

Remarque 2.8. Soit E un ev et $u \neq 0$ dans E. Alors $D_u = \{\lambda.u | \lambda \in \mathbb{R}\} = Vect(u)$

Proposition 2.9. *pour tout entier n,* $\mathrm{Vect}(1,X,\cdots,X^n)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$ *(et donc un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel), c'est le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n et on le note* $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 2.10. Soit x et y deux vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Justifier que $\mathrm{Vect}(x,y) = \mathrm{Vect}(-x,3y) = \mathrm{Vect}(x,x+y)$ On montre $\mathrm{Vect}(x,y) = \mathrm{Vect}(-x,3y)$ par double inclusion :
Si $u \in \mathrm{Vect}(x,y)$, alors $u = ax+by = -a(-x)+\frac{1}{3}3y$ et donc $u \in \mathrm{Vect}(-x,3y)$.
Si $u \in \mathrm{Vect}(-x,3y)$, alors $u = a(-x)+b3y = -ax+3by$ et donc $u \in \mathrm{Vect}(x,y)$.
L'autre égalité est semblable.

Proposition 2.11. *Soit une famille de vecteurs* $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ *d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel E, telle que* x_n *soit combinaison linéaire des vecteurs* $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$*. On a alors :* $\mathrm{Vect}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \mathrm{Vect}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$

Démonstration. On suppose que $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k$ avec $\lambda_1,...,\lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Montrons alors l'égalité par double inclusion :
Soit $u \in Vect(x_1,..,x_{n-1})$ alors $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n-1}x_{n-1} = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n-1}x_{n-1} + \alpha_n x_n \in Vect(x_1,...,x_n)$.
Soit $u \in Vect(x_1,..,x_n)$ alors $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n-1}x_{n-1} + \alpha_n x_n = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n-1}x_{n-1} + \alpha_n(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k x_k) = (\alpha_1+\alpha_n\lambda_1)x_1 + ... + (\alpha_{n-1}+\alpha_n\lambda_{n-1})x_{n-1} \in Vect(x_1,...,x_{n-1})$. □

3 Familles libres et familles génératrices

3.1 Famille génératrice

Définition 3.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La famille $(e_1,\ldots,e_n)$ de vecteurs de E est dite génératrice de E (ou encore engendre E) lorsque le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est égal à E, c'est à dire $\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_n) = E$.
Cela revient à dire que tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $e_1,e_2,\cdots,e_n$.

Exemple 3.2. 1. La famille $(\ (1,0),(0,1)\ )$ est génératrice de $E=\mathbb{R}^2$, mais pas la famille $(\ (1,1),(-1,-1)\ )$.
En effet, $Vect(\ (1,0),(0,1)\ ) = \mathbb{R}^2$ mais comme $(1,1) = -(-1,-1)$ alors par la proposition précédente, $Vect(-1,-1) = Vect(\ (1,1),(-1,-1)\ )$ et comme $Vect(-1,-1) = \{(-x,-x)\ tel\ que\ x \in, \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2$ on a le résultat.

2. Expliquer pourquoi la famille $\left(1+X, X+X^3\right)$ n'engendre pas $\mathbb{R}_3[X]$.
Montrons que $Vect\left(1+X, X+X^3\right) \neq \mathbb{R}_3[X]$ Pour cela, montrons que $X^2 \notin Vect\left(1+X, X+X^3\right)$.
Par l'absurde, si il existe $a,b \in \mathbb{R}$ tel que $X^2 = a(1+X)+b(X+X^3) = a+X(a+b)+bX^3$ qui est impossible par identification des coefficients.

Proposition 3.3. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la famille $\left(1,(X-a),(X-a)^2,\cdots,(X-a)^n\right)$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Par récurrence sur : $P(n)$: "la famille $\left(1,(X-a),(X-a)^2,\cdots,(X-a)^n\right)$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$"
I : Comme $Vect(1) = \mathbb{R}_0[X]$ trivialement (car $R_0[X] = \{a \;\; tel \;\; que a \in \mathbb{R}\}$)
H : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que la propriété est vraie au rang n, montrons la au rang $n+1$:
Soit $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, tel que $P = a_{n+1}X^{n+1}+Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
On remarque que $(X-a)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}X^k(-a)^{n+1-k} = X^{n+1}+R$ avec $R \in \mathbb{R}_n[X]$.
Ainsi $P = a_{n+1}((X-a)^{n+1}-R)+Q = a_{n+1}(X-a)^{n+1}-a_{n+1}R+Q$.
Or $-a_{n+1}R+Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et comme par hypothèse de récurrence, $\mathbb{R}_n[X] = Vect\left(1,(X-a),(X-a)^2,\cdots,(X-a)^n\right)$ alors il existe $c_0,\ldots,c_n \in \mathbb{R}$ tel que $-a_{n+1}R+Q = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(X-a)^k$.
Ainsi $P = a_{n+1}(X-a)^{n+1}+\sum\limits_{k=0}^{n} c_k(X-a)^k$ □

Exemple 3.4. 1. En reprenant l'ensemble F de l'exemple 2.7 (2), donner une partie génératrice de F. Donner en une autre.
Comme $F = Vect((0,1,1)) = Vect((0,2,2))$ alors $\{(0,1,1)\}$ est génératrice de F et de même pour $\{(0,2,2)\}$

2. Donner une partie génératrice de $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(1-X) = P(X)\}$. Montrer que c'est un espace vectoriel.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi $P = aX^2+bX+c$.
Ainsi $P(1-X) = P(X) \Leftrightarrow a(1-X)^2+b(1-X)+c = aX^2+bX+c \Leftrightarrow a-2aX+aX^2+b-bX+c = aX^2+bX+c \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} a+b+c &= c \\ -2a-b &= b \\ a &= a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= 0 \\ -2a-2b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -b \end{cases}$$
Ainsi $P \in F \Leftrightarrow P = -bX^2+bX+c = b(X-X^2)+c1$
Ainsi $F = Vect(X-X^2,1)$.

3. On considère l'espace vectoriel engendré par $u=(1,1,2)$, $v=(3,0,1)$ et $w=(5,2,5)$. Donner le ou les équations de cet espace, c'est à dire les conditions sur x,y,z pour que (x,y,z) soit un élément de l'espace. Est ce que $\{u,v,w\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?
Soit $X = (x,y,z)$. Alors $X \in Vect(u,v,w)$ si et seulement si il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que $(x,y,z) = a(1,1,2)+b(3,0,1)+c(5,2,5)$ si et seulement si il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} a+3b+5c &= x \\ a+2c &= y \\ 2a+b+5c &= z \end{cases}$ si et seulement si il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} a+3b+5c &= x \\ -3b-3c &= y-x \\ -5b-5c &= z-2x \end{cases}$ si et seulement si il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} a+3b+5c &= x \\ -15b-15c &= 5y-5x \\ -15b-15c &= 3z-6x \end{cases}$ si et seulement si il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} a+3b+5c &= x \\ -15b-15c &= 5y-5x \\ 0 &= 3z-6x-5y+5x \end{cases}$ si et seulement si il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$,
$\begin{cases} a+3b+5c &= x \\ -15b-15c &= 5y-5x \\ 0 &= 3z-x-5y \end{cases}$ si et seulement si $0 = -x-5y+3z$.
(en effet, quelque soit $x,y,z \in \mathbb{R}$, il existe toujours b et c tel que $-15b-15c = 5y-5x$ (même une infinité, il suffit de prendre c quelconque et et prendre $b = -\frac{5y-5x+15c}{15}$) et avec ce couple (b,c) fixé, il existe alors a tel que $a+3b+5c = x$ (on prend $a = x-3b-5c$)

Ainsi comme $Vect(u,v,w) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\; tel \;\; que \;\; -x-5y+3z\} \neq \mathbb{R}^3$ (car $(0,1,0)$ n'y est pas).

3.2 Famille libre et famille liée

Définition 3.5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La famille $(e_1,\ldots,e_n)$ de vecteurs de E est dite liée lorsqu'il existe des scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ NON TOUS NULS tels que $\lambda_1.e_1+\cdots+\lambda_n.e_n=0_E$. Cette dernière relation est appelée relation de dépendance linéaire entre les vecteurs e_1, …, e_n. Sinon, la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est dite libre.

Exemple 3.6.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((1,0),(0,1),(4,-3))$ est liée : En effet, $(4,-3)-4(1,0)+3(0,1)=0_{\mathbb{R}^2}$ donc la famille est liée. de même que la famille $((1,3),(-2,-6))$ En effet, $(1,3)+\frac{1}{2}(-2,-6)=0_{\mathbb{R}^2}$

   mais la famille $((1,0),(0,1))$ est libre : En fait, quelque soit $a,b\in\mathbb{R}$, $a(1,0)+b(0,1)=0_{\mathbb{R}^2}$ n'est possible que si $a=b=0$:
   Soit $a,b\in\mathbb{R}$, si $a(1,0)+b(0,1)=(0,0)$ alors $(a,b)=(0,0)$ et donc $a=0$ et $b=0$.

2. Dans $M_2(\mathbb{R})$, la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$ est liée :
   En effet, cherchons $a,b,c\in\mathbb{R}$ tel que $a\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

   $a\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a+b+c&2b+c\\2a+c&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}a+b+c&=&0\\2b+c&=&0\\2a+c&=&0\\0&=&0\end{array}\right.$

   $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}a+b+c&=&0\\2b+c&=&0\\-2b-c&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}a+b+c&=&0\\2b+c&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}a&=&b\\c&=&-2b\end{array}\right.$

   Ainsi quelque soit $b\in\mathbb{R}$, $b\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}-2b\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, en particulier,

   $$\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

   Ainsi la famille est liée.
   Mais la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$ est libre :
   Par le même procédé :

   $a\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}a+b+c&=&0\\2b+c&=&0\\2a&=&0\\0&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow a=b=c=0$

   Ainsi la famille est libre.

Prouver qu'une famille est libre

En pratique, pour montrer qu'une famille $(e_1,\ldots,e_n)$ de vecteurs de E est libre, on montre qu'étant donnés des scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, on a l'implication :
$\boxed{\lambda_1.e_1+\cdots+\lambda_n.e_n=0_E\Rightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i=0}$.

Exercice 1. Montrer que la famille de polynômes $(1,(X-1),(X-1)(X-2))$ est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$ de deux façons.

Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$, tels que $a.1+b(X-1)+c(X-1)(X-2)=0$ ainsi $a-b+2c+X(b-3c)+cX^2=0$ et donc $\left\{\begin{array}{lcl}a-b+2c&=&0\\b-3c&=&0\\c&=&0\end{array}\right.$
c'est à dire $a=b=c=0$.
Ainsi la famille est libre.
Autre méthode, soit $a,b,c\in\mathbb{R}$, tels que $a.1+b(X-1)+c(X-1)(X-2)=0$ alors en évaluant en 1 : $a=0$ puis en évaluant en 2 : $a+b=0$ et donc $b=0$ et en évaluant en 0 : $a-b+2c=0$ et donc $c=0$.
Ainsi la famille est libre.

Exercice 2.

1. Est ce que la famille de l'exemple 3.4 (3) est libre ?
   On remarque que : $2(1,1,2)+1(3,0,1)-(5,2,5)=(0,0,0)$ ainsi la famille est liée.

2. Est ce que la famille formée par $u=(2,-1,2)$, $v=(0,1,2)$ et $w=(0,-1,3)$ est libre ?
   Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$, $au+bv+cw=(0,0,0)\Leftrightarrow(2a,-a+b-c,2a+2b+3c)=(0,0,0)\Leftrightarrow 2a=0,\ -a+b-c=0$ *et* $2a+2b+3c=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow a=b=0$
   Ainsi la famille est libre.
3. Montrer que la famille de fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, $\{f_1;f_2\}$ est libre si elles sont définies par $f_1(x)=e^x$ et $f_2(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   Soit $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $af_1+bf_2=0$ c'est à dire pour tout $x\in\mathbb{R}$, $af_1(x)+bf_2(x)=0$ c'est à dire pour tout $x\in\mathbb{R}$, $ae^x+bx=0$.
   Comme ceci est vrai pour tout $x\in\mathbb{R}$, alors c'est vrai pour $x=0$, ainsi $a=0$ puis c'est vrai pour $x=1$ et donc $b=0$.

Proposition 3.7. *Quelques propriétés faciles : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
- *Une famille contenant le vecteur nul est liée.*
- *Une famille de cardinal 1, (u) où $u\in E$, est libre si et seulement si $u\neq 0$.*
- *Une famille de vecteurs est liée si et seulement si au moins un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.*

3.3 Lien avec la colinéarité

.

Définition 3.8. deux vecteurs u et v d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E sont colinéaires lorsque l'un est combinaison linéaire de l'autre (ou multiple de l'autre), c'est-à-dire lorsqu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $u=\lambda v$ ou $v=\lambda u$.

Proposition 3.9.
- *Soit u et v deux vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.*
  La famille (u,v) est libre $\Leftrightarrow$ u et v sont non colinéaires.
- *Soit une famille de vecteurs $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.*
  La famille $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ est libre $\Rightarrow$ les vecteurs de cette famille sont deux à deux non colinéaires.
  Pour $n\geq 3$, LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE !

Démonstration. 1) On montre le tout par double implication :
Supposons que (u,v) est libre, et par l'absurde que u et v sont colinéaires, alors $u=\lambda v$ (et donc $u-\lambda v=0$) ou $v=\lambda u$ (et donc $v-\lambda u=0$), dans les 2 cas c'est absurde, ainsi u et v sont non colinéaires.
Supposons que u et v sont non colinéaires, alors supposons par l'absurde que la famille n'est pas libre, alors il existe $b,c\in\mathbb{R}$ non tous nuls (supposons $b\neq 0$, l'autre cas est similaire) tel que $bu+cv=0$ alors $u=-\dfrac{c}{b}v$ et donc u et v sont colinéaires, ce qui est absurde. Ainsi la famille est libre.
2) Montrons cette implication par contraposée, il faut alors montrer que s'il existe une paire de vecteurs de la famille qui sont colinéaires alors la famille n'est pas libre :
En effet, si on supposons par exemple que u_1 et u_2 sont colinéaires, alors il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $u_1=au_2$ et donc $u_1-au_2+0u_3+\ldots.+0u_n=0$ et donc la famille n'est pas libre (les coefficients de cette combinaison linéaire sont non tous nuls). □

En pratique, on peut donc facilement savoir si une famille <u>de cardinal 2</u> est libre ou liée : on regarde si les deux vecteurs sont colinéaires ou pas. Par exemple, dans $\mathbb{R}^4$, la famille $(\,(1,1,-2,-1),(-2,-2,4,2)\,)$ est liée, tandis que $(\,(1,1,-2,-1),(0,-2,4,2)\,)$ est libre.

3.4 Degrés échelonnés

Définition : Soit $(P_0,\ldots,P_n)$ une famille de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On dit qu'elle est échelonnée en degré si $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\deg(P_k)=k$.

C'est par exemple le cas de la famille $(1,(X-1),(X-1)(X-2))$ de $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 3.10. *Une famille de polynômes non nuls, de degrés 2 à 2 distincts, est libre dans $\mathbb{R}[X]$.*

Démonstration. On considère une famille de polynômes $(P_1,...,P_n)$ de degrés 2 à 2 distincts. On suppose, quitte à réordonner que $deg(P_1) < deg(P_2) < ... < deg(P_n)$.
Soit $a_1,...,a_n \in \mathbb{R}$, $a_1P_1 + a_2P_2 + ...a_nP_n = 0$.
Supposons par l'absurde qu'ils sont non tous nuls, et notons a_p le plus grand coefficient non nul. Ainsi pour tout $k \geqslant p+1$, $a_k = 0$.
Ainsi $a_1P_1 + a_2P_2 + ...a_pP_p = 0$ Alors $a_1P_1 + ... + a_{p-1}P_{p-1} = -a_pP_p$. On remarque que $deg(a_1P_1 + ... + a_{p-1}P_{p-1}) \leqslant max(deg(a_1P_1,...,a_{p-1}P_{p-1})) < deg(P_p)$.
Ainsi si $a_p \neq 0$ alors comme $deg(-a_pP_p) = deg(P_p)$ ce qui est donc absurde.
Ainsi $a_p = 0$, ce qui est absurde. Ainsi ils sont tous nuls.

□

Exemple 3.11. Justifier que la famille $(1,(X-1),(X-1)(X-2))$ de $\mathbb{R}[X]$ est libre.
Trivial par la proposition précédente.

3.5 Base

Définition 3.12. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle base de E toute famille libre et génératrice de E.

3.6 Exemples fondamentaux : les bases canoniques ("usuelles")

- $(e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $(e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_{n-1} = (0,\dots,0,1,0), e_n = (0,\dots,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^n$. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- $(1,X,\dots,X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Soit n et p deux entiers de $\mathbb{N}^*$, notons pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, $E_{i,j}$ la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui sur la i-ième ligne et j-ième colonne, qui vaut 1. Alors $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ est une base de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée la base canonique.

Exercice 3. Expliciter la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$, puis donner une base de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.
Il s'agit de $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right.$ pour la base de $M_2(\mathbb{R})$.
Une base de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right.$ (démonstration laissée au lecteur)

Théorème 3.13. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E.*
Il y a équivalence entre :

1. *La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.*
2. *Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(e_1,\dots,e_n)$, c'est à dire $\forall x \in E, \exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \lambda_1.e_1 + \cdots + \lambda_n.e_n$.*

Démonstration de (1) implique (2) : Supposons que la famille $(e_1,...,e_n)$ est une base de E.
Soit $x \in E$ alors comme la famille ci dessus est génératrice alors il existe $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$.
De plus, cette écriture est unique car si on suppose que $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n)\beta_1 e_1 + ... + \beta_n e_n$ alors $0 = (\lambda_1 - \beta_1)e_1 + ... + (\lambda_n - \beta_n)e_n$ et comme la famille $(e_1,...,e_n)$ est libre alors $\lambda_1 - \beta_1 = 0,...,\lambda_n - \beta_n = 0$ et donc $\lambda_1 = \beta_1$, ... ,$\lambda_n = \beta_n$.
Ainsi $\forall x \in E, \exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \lambda_1.e_1 + \cdots + \lambda_n.e_n$
L'autre sens ne présente pas plus de difficulté.

Définition 3.14. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors $\forall x \in E, \exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \lambda_1.e_1 + \cdots + \lambda_n.e_n$. Les $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ sont alors appelés les **coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$**.
On appelle matrice coordonnée de x dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

.

Exercice 4. Ecrire la matrice coordonnée du vecteur X^2+2X-1 de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et dans la base $\mathcal{B}=(1,(X-2),(X-2)^2)$ La famille est libre car de degré 2 à 2 distincts. Elle est génératrice par la question 3.3
Ainsi X^2+2X-1 posséde une unique écriture dans la base $(1,(X-2),(X-2)^2)$.
On trouve $X^2+2X-1=(X-2)^2+6(X-2)+9$.

Ainsi $Mat_{\mathcal{B}}X^2+2X-1=\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5. Donner la matrice coordonnée de $u=(1,1,1)$ dans la base $\{e_1,e_2,e_3\}$ où $e_1=(1,2,3)$, $e_2=(0,1,2)$ et $e_3=(1,0,2)$ après avoir prouver que c'est une base.
La preuve du fait que $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ est une base est laissé au lecteur.

Ensuite, on cherche $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $a(1,2,3)+b(0,1,2)+c(1,0,2)=(1,1,1)$ c'est à dire $\left\{\begin{array}{cc} a+c & = \\ 1 & \\ 2a+b & = \\ 1 & \\ 3a+2b+2c & = \\ 1 & \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & -1 \\ c & = & 0 \end{array}\right.$ Ainsi $(1,2,3)-(0,1,2)+0(1,0,2)=(1,1,1)$ et donc $Mat_B(1,1,1)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$