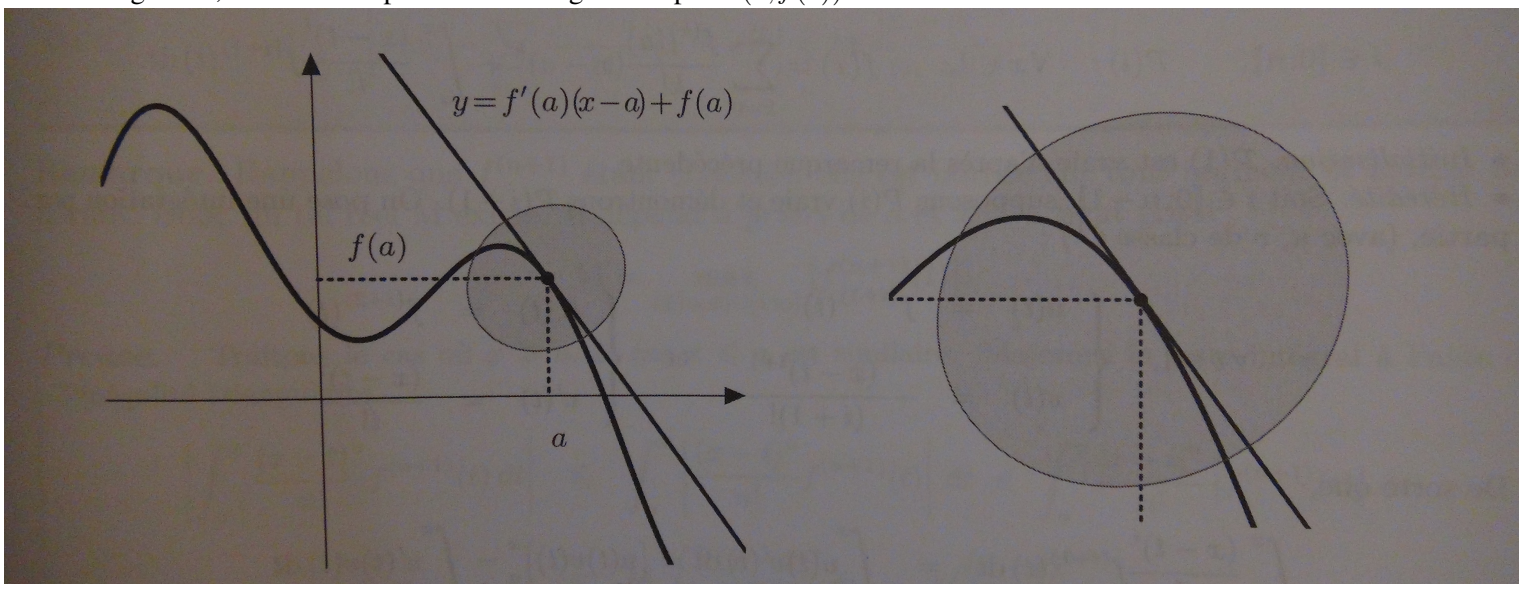
Chapitre 31 : Formules de Taylor, Extremum et Développement limités

1 Introduction

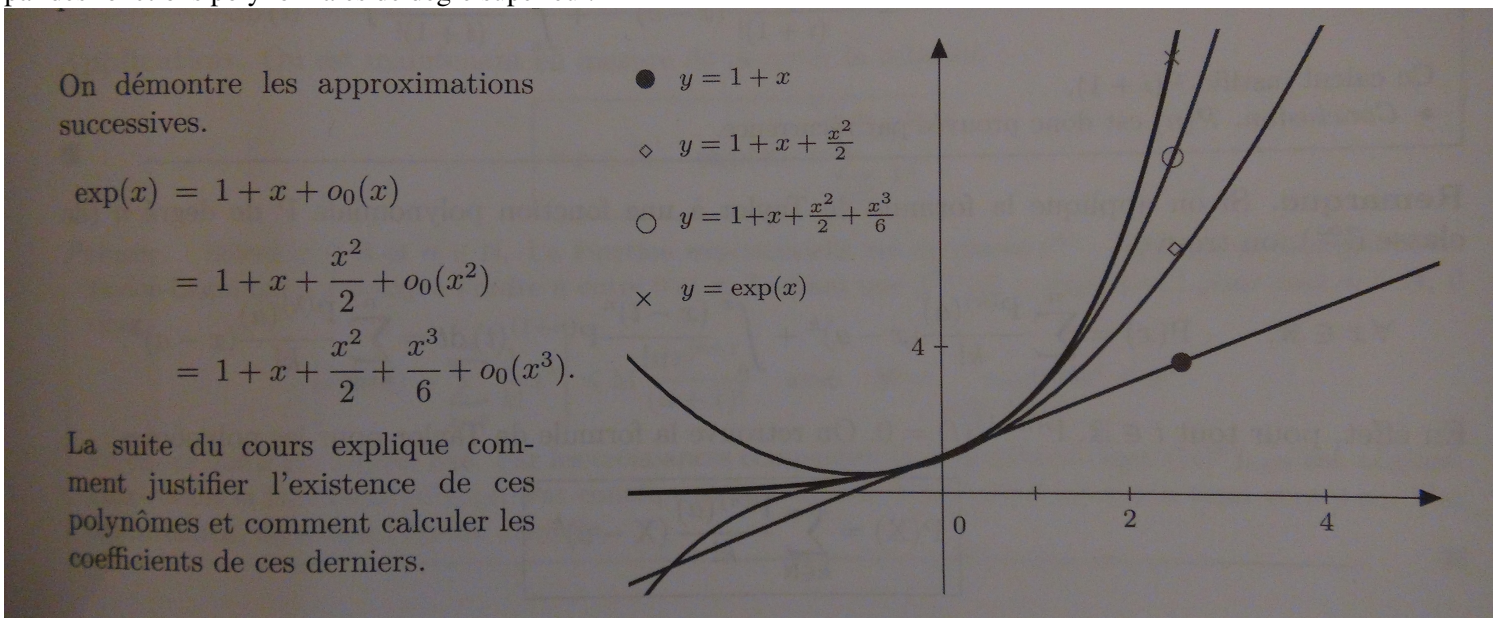
Nous avions vu lors du premier semestre que lorsque $f : I \to \mathbb{R}$, on peut approximer f dans un voisinage de a par une fonction affine à l'aide du développement limité à l'ordre 1 :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)$$

Au voisinage de a, la courbe est proche de la tangente au point $(a, f(a))$:



Comme une fonction affine n'est rien d'autre qu'une fonction polynômiale de degré 1, on peut chercher à approximer par des fonctions polynomiales de degré supérieur.



2 visions sont alors possibles : une vision globale qui regarde l'approximation de la fonction par le polynôme sur $\mathbb{R}$ tout entier : cette approximation se présentera sous la forme d'une égalité avec un reste ou d'une inégalité sur la différence entre

le polynôme et la fonction.
La deuxième vision est une vision locale : comment la fonction est approximée par le polynôme autour de a ? Elle se présente par une égalité entre la fonction et le polynôme, à un facteur près "qui tendra vers 0 quand on se rapproche de a".
Attention, nous verrons que des conditions sont nécessaires pour l'obtention des ces approximations (que l'on appelle formule de Taylor) qui portera sur le potentiel caractère C^n de la fonction f.

2 Formules de Taylor globales

n est un entier dans les énoncés qui suivent.

2.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$, on a

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

Donc $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$.

Si f est de classe C^2 sur I, alors on peut intégrer par parties dans $\int_a^b f'(t)dt$,
en posant $u(t) = f'(t)$ et $v'(t) = 1$ et $u'(t) = f''(t)$ et $v(t) = (b-t)$:

$$\int_a^b f'(t)dt = [f'(t)(b-t)]_a^b + \int_a^b f''(t)(b-t)\,dt = f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t)\,dt$$

On obtient $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t)\,dt$

Théorème 2.1. *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$,*

$$\boxed{f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt}$$

*Cette égalité est appelée **formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre** n.*

Démonstration. On raisonne par récurrence, pour $i \in [[0;n]]$ sur la proposition $P(i)$: "$\forall b \in I$, $f(b) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \dfrac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^i}{i!} f^{(i+1)}(t)dt$"

Initialisation : $P(1)$ est vraie par ce qui est fait ci dessus.
Hérédité : soit $i \in [[0;n-1]]$, supposons que $P(i)$ est vraie et montrons $P(i+1)$.
Par une IPP avec $u = f^{(i+1)}(t)$ (et donc $u' = f^{(i+2)}(t)$), et $v' = \dfrac{(b-t)^i}{i!}$ (et $v = -\dfrac{(b-t)^{i+1}}{(i+1)!}$) ($u$ et v sont C^1 car $f \in C^{n+1}$) :

$$\int_a^b \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i+1)}(t)\,dt = [-\frac{f^{(i+1)}(t)(b-t)^{i+1}}{(i+1)!}]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{i+1}}{(i+1)!} f^{(i+2)}(t)\,dt = \frac{f^{(i+1)}(a)(b-a)^{i+1}}{(i+1)!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{i+1}}{(i+1)!} f^{(i+2)}(t)\,dt$$

Ainsi

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + \int_a^b \frac{(b-t)^i}{i!} f^{(i+1)}(t)dt =$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(i+1)}(a)(b-a)^{i+1}}{(i+1)!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{i+1}}{(i+1)!} f^{(i+2)}(t)\,dt$$

Conclusion : $P(i)$ est initialisée et héréditaire donc vraie. □

Cas particulier important : $a=0$ et $b=x$. Si f est de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0, $\forall x \in I$,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$$

Exercice 1. 1. Expliciter la formule de Taylor avec la fonction sinus à l'ordre 3 et $a=0$ et $b=x\in\mathbb{R}$.

2. (a) Donner la formule de Taylor avec la fonction exp à l'ordre 2 et $a=0$ et $b=1$.

   (b) En déduire $\frac{5}{2}\leqslant e\leqslant 3$.

Exercice 2. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral à la fonction $x\mapsto \ln(1+x)$ pour $a=0$ et $b=x\geq 0$ à l'ordre 1, puis en déduire que $\forall x\geq 0$, $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x$.

Comme $f: x\mapsto ln(1+x)$ est $C^2(]-1;+\infty[)$ alors on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 1 : pour tout $x\geqslant 0$:

$$ln(1+x)=ln(1)+f'(0)x+\int_0^x \frac{(x-t)^1}{1!}f^{(2)}(t)\,dt=x-\int_0^x \frac{(x-t)}{(1+t)^2}\,dt$$

Or pour tout $t\in[[0;x]]$, $\frac{(x-t)}{(1+t)^2}\geqslant 0$, donc $ln(1+x)=x-\int_0^x \frac{(x-t)}{(1+t)^2}\,dt\leqslant x$

De plus, comme $f: x\mapsto ln(1+x)$ est $C^3(]-1;+\infty[)$ alors on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2 : pour tout $x\geqslant 0$:

$$ln(1+x)=ln(1)+f'(0)x+f''(0)x^2/2+\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}f^{(3)}(t)\,dt=x-x^2/2+\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2(1+t)^3}\,dt$$

Or $\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2(1+t)^3}\,dt\geqslant 0$ donc $x-\frac{x^2}{2}\leqslant ln(1+x)$. pour tout $x\geqslant 0$.

2.2 Cas particulier des polynômes

Soit f une fonction **POLYNOME de degré au plus** n et a, x deux réels. Exprimer $f(x)$ en fonction des valeurs de f et de ses dérivées en a grâce à la formule de Taylor à l'ordre n. Que retrouve-t-on ?

Comme $f\in C^\infty$ alors $f\in C^{n+1}$. Or comme $deg(f)\leqslant n$ alors $f^{(n+1)}=0$ et donc :

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Rappel : On dit que a est racine de **multiplicité** k ($k\in\mathbb{N}^*$) d'un polynôme P non nul lorsque P est divisible par $(X-a)^k$ mais pas par $(X-a)^{k+1}$.

Déduire de la formule de Taylor une condition nécessaire et suffisante pour que a soit racine d'ordre k d'un polynôme P non nul à coefficients réels.

On retrouve : a est racine d'ordre au moins k d'un polynôme f si et seulement si $f(a)=0$, $f'(a)=0$, ... $f^{(k-1)}(a)=0$: En effet, si a est racine d'ordre au moins k d'un polynôme f alors $f=(X-a)^kQ$ et donc $f^{(i)}=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}((X-a)^k)^{(j)}Q^{(i-j)}=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\frac{k!}{j!}(X-a)^{k-j}Q^{(i-j)}$ et donc $f^{(i)}(a)=0$ pour tout $i\leqslant k$.

Si $f(a)=0$, $f'(a)=0$, ... $f^{(k-1)}(a)=0$ alors par la formule de Taylor Lagrange, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ et donc f est factorisable par $(X-a)^k$ et donc a est racine d'ordre au moins k.

Exemple 2.2. Soit $P=X^3-4X^2+5X-2\in\mathbb{R}[X]$. Montrer que 1 est racine de P et déterminer sa multiplicité. En déduire la factorisation de P.

On a $P(1)=0$, $P'(X)=3X^2-8X+5$ et donc $P'(1)=0$ et donc $P''(X)=6X-8$ et donc $P''(1)\neq 0$. Ainsi 1 est racine d'ordre 2 et $P(X)=(X-1)^2(X-2)$

2.3 Inégalité de Taylor-Lagrange

Rappel : égalité des accroissements finis pour une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$:
Il existe $c \in]a,b[$, tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
donc $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

Si f' est bornée sur $]a,b[$, ce qui peut se traduire par $\forall t \in]a,b[$, $|f'(t)| \leq M$ où M est une constante positive, on a l'inégalité des accroissements finis :
$|f(b)-f(a)| \leqslant M|b-a|$

L'inégalité de Taylor-Lagrange généralise l'inégalité des accroissements finis avec une hypothèse plus forte :

Théorème 2.3. *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $|f^{(n+1)}|$ est majorée par M sur I. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$,*

$$\boxed{\left| f(b)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(b-a)-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \right| \leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

.
Cette inégalité est appelée ***inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre*** *n.*

Démonstration. Nous traiterons le cas $b \geqslant a$ mais l'autre cas est similaire. Il suffit de voir que, par l'égalté de Taylor Lagrange,

$$\left| f(b)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(b-a)-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \right| = |\int_a^b \frac{(b-a)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}\,dt| \leqslant \int_a^b |\frac{(b-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}|\,dt$$

Or comme $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in I$ donc sur $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b |\frac{(b-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)}{n!}|\,dt = \int_a^b \frac{|(b-t)^n||f^{(n+1)}(t)|}{n!}\,dt \leqslant \int_a^b \frac{|b-t|^n M}{n!}\,dt = \frac{M}{n!}\int_a^b (b-t)^n\,dt = \frac{M}{n!}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)}M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

□

Cas particulier important : $a=0$ et $b=x$. Si f est de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0 où $|f^{(n+1)}|$ est majorée par M. Alors, pour tout $x \in I$, $\left| f(x)-f(0)-\dfrac{f'(0)}{1!}x-\cdots-\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right| \leq M\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Exemple 2.4. Ecrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et le choix de $a=0$ et $b=x \geq 0$ aux ordres 0, 1, 2.

Ordre 0 : $x \mapsto ln(1+x)$ est C^1 et comme $|(ln(1+t))'| = |\dfrac{1}{1+t}| \in [\dfrac{1}{1+x},1]$ si $t \in [0,x]$ alors pour $x \geqslant 0$: $|ln(1+x)-0| = ln(1+x) \leqslant |x| = x$
Ordre 1 : $x \mapsto ln(1+x)$ est C^2 et comme $|(ln(1+t))''| = |\dfrac{-1}{(1+t)^2}| \in [\dfrac{1}{(1+x)^2},1]$ donc $|(ln(1+t))''| \leqslant 1$ si $t \in [0,x]$ alors pour $x \geqslant 0$: $|ln(1+x)-x| =\leqslant |x^2/2| = x^2/2$
Ordre 2 : $x \mapsto ln(1+x)$ est C^3 et comme $|(ln(1+t))^{(3)}| = |\dfrac{2}{(1+t)^3}| \in [\dfrac{2}{(1+x)^3},2]$ donc $|(ln(1+t))''| \leqslant 2$ si $t \in [0,x]$ alors pour $x \geqslant 0$: $|ln(1+x)-x+x^2/2| =\leqslant |x^3/3| = x^3/3$

Exercice 3. preuve de la convergence des séries exponentielles
Notons f la fonction exp et x un nombre réel.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer en distinguant les deux cas $x \geq 0$ et $x < 0$ que pour tout t compris entre 0 et x, on a $f^{(n+1)}(t) \leq e^{|x|}$.

   On a $f^{(n+1)}(t) = exp(t)$ et donc : si $x \geqslant 0$ alors $exp(t) \leqslant exp(x) = exp(|x|)$ et si $x < 0$ alors $t < 0 < -x$ et donc $exp(t) < exp(-x) = exp(|x|)$

2. Majorer $|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}|$ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.

   Comme $exp \in C^{n+1}$ alors par l'inégalité de Lagrange entre 0 et x :

$$|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} exp(|x|)$$

   Car $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant e^{|x|}$ pour tout t entre 0 et x.

3. En déduire la convergence de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ et la valeur de la somme de cette série.

   Donc, par croissance comparée : $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ et donc $|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| \to 0$ et donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge vers e^x.

Exercice 4. (DÉFI) En utilisant les idées de l'exercice précédent, prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

(correction non proposée)

3 Formule de Taylor-Young (locale)

Théorème 3.1. *(admise) Soit f une fonction de classe $C^n(I)$ et $a \in I$ alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n)$$

Remarque 3.2. Par le changement de variables $h = x - a$, on obtient :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o_a(h)^n)$$

Remarque 3.3. Notons que l'égalité de Taylor Young peut se déduire de l'inégalité de Taylor Lagrange dans le cas $f \in C^{n+1}(I)$ car

$$\frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = o_0((x-a)^n)$$

Exemple 3.4. Soit $f \in C^2(I)$ et $a \in I$.
Calculons la limite quand $h \to 0$ de $\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$:
Par la formule de T-Y :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o_0(h^2) \ et \ f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o_0(h^2)$$

Ainsi

$$\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \frac{h^2 f''(a) + 2o_0(h^2)}{h^2} = f''(a) + o_0(1) \to f''(a)$$

(nous ferons un retour sur les propriétés utiles des o dans la partie "notation o").

4 Extremum

L'objectif de cette partie est d'étudier la potentielle existence d'un extrema à une fonction et si existence de le déterminer.

Définition 4.1.
- On dit que f admet un maximum global en x si pour tout $y \in I$, $f(y) \leqslant f(x)$.
- On dit que f admet un minimum global en x si pour tout $y \in I$, $f(y) \geqslant f(x)$.
- On dit que f admet un maximum local en x lorsque ceci est vraie sur un voisinage de x :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall y \in I, tq\ |y-x| \leqslant \alpha\ f(y) \leqslant f(x)$$

- On dit que f admet un minimum local en x lorsque ceci est vraie sur un voisinage de x :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall y \in I, tq\ |y-x| \leqslant \alpha\ f(y) \geqslant f(x)$$

- Un extremum désigne un minimum ou un maximum.

Théorème 4.2. *(rappel) Soit f une fonction continue de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$. L'ensemble image $f([a,b])$ est un segment de $\mathbb{R}$: $[m,M]$. En particulier les minimum et maximum de f sur $[a,b]$ sont bien définies et sont m et M.*

Remarque 4.3. Autrement dit : f est bornée et atteint ses bornes : il existe α, β tels que pour tout $x \in [a,b]$, $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$

Attention à être précis sur les hypothèses : **continue** sur un **segment**, sinon le résultat est faux (voir ce qui suit)

Exercice 5. Justifier que le th. précédent est faux dans les cas suivants :

1. f est continue sur $]0,1]$.

   La fonction $f : x \in]0;1] \mapsto 1/x$ est continue mais n'admet pas de maximum.
2. f est continue sur $\mathbb{R}$.

   La fonction $f : x \in]0;1] \mapsto x$ est continue mais n'admet pas de maximum ni de minimum.
3. $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ n'est pas continue.

   La fonction définie par $f : x \in]0;1] \mapsto 1/x$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue et n'admet pas de maximum.

Théorème 4.4. *(rappel) Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que :*

1. *f admet un extremum local en a*
2. *a appartient à un intervalle **ouvert** dans I*
3. *f est dérivable en a*

Alors $f'(a) = 0$

Remarque 4.5. On appelle alors a un point critique ("ssi $f'(a) = 0$") : les points critiques donnent des candidats pour les extremums. La procédure consiste souvent à résoudre $f'(x) = 0$ pour trouver les points critiques puis à chercher si ceux ci sont des extremums, et s'ils sont locaux ou globaux.

Exercice 6.

1. Justifier que le résultat n'est plus valable si a est sur le bord de I

   La fonction $x \mapsto x$ sur $[0,1]$ admet un maximum en 1, et est dérivable en 1 mais $f'(1) = 1$
2. Prouver que la réciproque est fausse.

   La fonction $x \mapsto x^3$ sur $]-1,1[$ respecte $f'(0) = 0$ mais n'admet pas de minimum ni de maximum en 0 (local ou global)

Théorème 4.6. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a appartenant à un intervalle ouvert dans I. On suppose que a est un point critique de f, que $f \in C^2$ sur un intervalle ouvert contenant a et $f''(a) \neq 0$. Alors la fonction f admet un extremum local en a et*

1. *Si $f''(a) < 0$ alors f admet un maximum local.*
2. *Si $f''(a) > 0$ alors f admet un minimum local.*

Démonstration. Comme $f \in C^2$ sur un intervalle ouvert contenant a alors on peut appliquer la formule de T-Y à l'ordre en a et :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + o_a((x-a)^2)$$

Ainsi comme a est un point critique de f alors pour tout x

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + o_a((x-a)^2)$$

Donc, comme $f''(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} \frac{(x-a)^2}{2}f''(a)$ et donc $f(x) - f(a)$ est du même signe que $\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)$ au voisinage de a et donc du même signe que $f''(a)$ au voisinage de a. Ainsi si $f''(a) < 0$ alors f admet un maximum local (car sur un voisinage de a : $f(x) - f(a) \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant f(a)$) et si $f''(a) > 0$ alors f admet un minimum local. □

Remarque 4.7. Attention, le résultat n'est que local ! ! ! !
De plus, on ne peut rien dire si $f''(a) = 0$: trouver un contre exemple vous même.

Exercice 7.

Calculer les extremums locaux sur le domaine de définition de :

$$f : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \ \ et \ \ e^x + x(ln(x) - 1 - e)$$

(en utlisant le th. précédent)
(résultat à trouver : minimum local en 3, maximum local en -1 pour f + minimum local en 1, pas de maximum local pour g)

Proposition 4.8. *(proposition en retard)*
*Soit f une fonction **convexe** et C^1 sur un intervalle **ouvert** I. Si f admet un point critique en $a \in I$ alors $f(a)$ est un minimum global pour f sur I.*

Démonstration. Comme la fonction f est convexe et C^1 sur $I =]b,c[$ alors sa dérivée est croissante sur I. Comme $f'(a) = 0$ alors $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]b,a]$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a,c[$ et donc $f(a)$ est un minimum global sur I. □

5 Notation o

Dans cette partie, en prévision d'un usage régulier dans la partie suivante, nous allons détailler un peu le fonctionnement de la notation o.

On rappelle que la notation $f(x) = o_a(g(x))$ signifie que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
De plus, ce "=" est un "appartient" déguisé : $f(x) = o_a(g(x))$ signifie que f appartient à l'ensemble des fonctions négligeable par rapport à g. Donc si $f(x) = 1 + o_a(x)$ et $g(x) = 1 + o_a(x)$ peut arriver sans que $f(x) = g(x)$! ! (exemple avec $f(x) = 1 + x^2$ et $g(x) = 1 + x^3$ en 0). Dans doute, on préférera $f(x) = 1 + o_a(x)$ et $g(x) = 1 + o'_a(x)$ pour ne pas confondre.

Dans la proposition suivante, nous allons détailler une série de proposition sur les $o_0(x^n)$ ou les $o_a((x-a)^n)$, chacune sera accompagnée d'un exemple simple :

Proposition 5.1. *Soit I un intervalle ouvert contenant 0 ou a (en fonction de la proposition)*

1. *Si, pour tout $x \in I$, $f(x) = o_0(x^n)$ alors pour tout $k \leqslant n$, $f(x) = o_0(x^k)$.*

   Par exemple si $f(x) = o_0(x^3)$ alors $f(x) = o_0(x^2)$ pour tout $x \in I$.
2. *Si, pour tout $x \in I$, $f(x) = o_a((x-a)^n)$ alors pour tout $k \leqslant n$, $f(x) = o_a((x-a)^k)$.*

   Par exemple si $f(x) = o_a((x-a)^3)$ alors $f(x) = o_a((x-a)^2)$ pour tout $x \in I$.
3. *Si pour tout $x \in I$, $f(x) = x^n o_0(x^p)$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) = o_0(x^{n+p})$.*

   Si pour tout $x \in I$, $f(x) = (x-a)^n o_a((x-a)^p)$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) = o_a((x-a)^{n+p})$.

   Par exemple, si pour tout x, $f(x) = 2 + x + x^2 o_0(x^3)$ alors $f(x) = 2 + x = o_0(x^5)$ (on écrira $f(x) = 2+x+x^2 o_0(x^3) = 2+x+o_0(x^5)$)
4. *Si pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{o_0(x^p)}{x^n}$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) = o_0(x^{p-n})$.*

   Si pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{o_a((x-a)^p)}{(x-a)^n}$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) = o_a((x-a)^{p-n})$.

   Par exemple, si pour tout x, $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2 + x + \dfrac{o_0(x^4)}{x^2}$ alors $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2 + x = o_0(x^2)$
5. *Si $p \leqslant n$ alors $\lambda o_0(x^p) + \beta o_0(x^n) = o_0(x^p)$*

   Par exemple si $f(x) = 1 + x + 2x^2 + o_0(x^2)$ et $g(x) = 1 + x + o_0(x)$ alors $f(x) + g(x) = 2 + 2x + 2x^2 + o_0(x^2) + o_0(x) = 2 + 2x + o_0(x)$ (car $x^2 = o_0(x)$).
6. *On a, pour tout $x \in I$: $f(x) = o_0(x^n) \Leftrightarrow f(x) = x^n \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon \underset{x \to 0}{\to} 0$*

   Par exemple, $x^3 ln(1+x) = o_0(x^3)$.
   Autre exemple : si $f(x) = o_0(x^2)$ alors il existe ε tel que $\varepsilon(x) \to 0$ en 0, et $f(x) = x^2 \varepsilon(x)$

Démonstration.

1. Supposons pour tout $x \in I$, $f(x) = o_0(x^n)$ alors pour tout $k \leqslant n$: $\dfrac{f(x)}{x^k} = x^{n-k}\dfrac{f(x)}{x^n} \to 0$ car $f(x) = o_0(x^n)$ et $n - k \geqslant 0$.
2. Même démonstration en a.
3. On a $\dfrac{f(x)}{x^{n+p}} = \dfrac{x^n o_0(x^p)}{x^{n+p}} = \dfrac{o_0(x^p)}{x^p} \underset{x \to 0}{\to} 0$ par définition de $o_0(x^p)$. De même en a.
4. On a $\dfrac{f(x)}{x^{p-n}} = \dfrac{o_0(x^p)}{x^n x^{p-n}} = \dfrac{o_0(x^p)}{x^p} \underset{x \to 0}{\to} 0$ par définition de $o_0(x^p)$. De même en a.
5. Si $p \leqslant n$ alors $\dfrac{\lambda o_0(x^p) + \beta o_0(x^n)}{x^p} = \lambda \dfrac{o_0(x^p)}{x^p} + \beta \dfrac{o_0(x^n)}{x^p} = \lambda \dfrac{o_0(x^p)}{x^p} + \beta \dfrac{o_0(x^p)}{x^p} \to 0$ (car un $o_0(x^n)$ est un $o_0(x^p)$
6. Supposons f ne s'annule pas au voisinage de 0.

   Si pour tout $x \in I$ $f(x) = x^n \varepsilon(x)$ alors $\dfrac{f(x)}{x^n} = \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\to} 0$ et donc $f(x) = o_0(x^n)$
   Réciproquement, si $f(x) = o_0(x^n)$, alors $f(x) = x^n \dfrac{f(x)}{x^n}$ et $\dfrac{f(x)}{x^n} = \dfrac{o_0(x^n}{x^n} \to 0$.

□

6 Développements limités

6.1 Définition et propriétés

Définition 6.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et f définie sur I ou $I \setminus \{0\}$. On dit que f admet un **développement limité d'ordre n au voisinage de 0** (on notera "$DL_n(0)$") lorsqu'il existe $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que au voisinage de 0 on ait : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$.

Le polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ s'appelle la "**partie régulière**" du développement limité.

On généralise la notion en : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et f définie sur I ou $I \setminus \{a\}$. On dit que f admet un **développement limité d'ordre n au voisinage de** a (on notera "$DL_n(a)$") lorsqu'il existe $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que au voisinage de a on ait : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$.

Proposition 6.2.
- *Cas particulier du DL d'ordre 0 (f admet le $DL_0(0)$: $f(x) = f(0) + o(1)$) $\Leftrightarrow$ (f est continue en 0)*
- *Cas particulier du DL d'ordre 1 (f admet le $DL_1(0)$: $f(x) = f(0) + ax + o(x)$) $\Leftrightarrow$ (f est dérivable en 0 avec $f'(0) = a$)*

Démonstration.
1. Il suffit de se rappeler que $f(x) \to l \Leftrightarrow f(x) = l + o(1)$.
2. Il s'agit de la proposition sur le DL d'ordre 1 du chapitre sur la dérivation car $o(x) = x\varepsilon(x)$.

□

Exemple 6.3. Les fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \exp(x^2)$ admettent un $DL_1(0)$ puisqu'elles sont dérivables en 0. Ecrire ces $DL_1(0)$.

On note f la première et g la deuxième alors f et g sont dérivable en 0 donc admettent des $DL_1(0)$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+0}} = 1/2$ et $g'(0) = 0$ donc
Le $DL_1(0)$ de f est $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + o_0(x)$ et le $DL_1(0)$ de g est $g(x) = 1 + o_0(x)$

Proposition 6.4. *(admise mais accessible)*
1. *Si f admet un $DL_n(0)$, il est unique.*
2. *Si f admet un $DL_n(0)$, alors pour tout p entier inférieur ou égal à n, f possède un $DL_p(0)$. La partie régulière de ce $DL_p(0)$ est obtenue en supprimant les termes de degré supérieur ou égal à $p+1$ dans la partie régulière du $DL_n(0)$.*
3. *Si f admet le $DL_n(0)$: $f(x) = a_p x^p + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ où $a_p \neq 0$, alors $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$.*

Exemple 6.5. Si f admet le $DL_3(0)$: $f(x) = 1 - 3x^2 + 7x^3 + o(x^3)$, alors f admet des $DL_p(0)$ pour $p = 2, 1, 0$. Écrire ces DL :

Le $DL_0(0)$ est $f(x) = 1 + o(1)$
Le $DL_1(0)$ est $f(x) = 1 + o(x)$
Le $DL_2(0)$ est $f(x) = 1 - 3x^2 + o(x^2)$

Si f admet le $DL_3(0)$: $f(x) = 1 - 3x^2 + 7x^3 + o(x^3)$, on a les équivalents suivants :

$f(x) \underset{0}{\sim} 1$ mais aussi $f(x) \underset{0}{\sim} 1 - 3x^2$ et $f(x) \underset{0}{\sim} 1 - 3x^2 + 7x^3$, mais aussi $f(x) - 1 \underset{0}{\sim} -3x^2$ ...

Si f admet le $DL_3(0)$: $f(x) = 1 - 3x^2 + 7x^3 + o(x^3)$, que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-1}{x}$? $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-x}{x^2}$?

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x^2+7x^3+o(x^3)}{x}=\lim_{x\to 0}-3x+7x^2+o(x^2)=0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-3x^2+7x^3+o(x^3)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}-3+7x+o(x)=+\infty$$

6.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 6.6. *(admis) Si f est de classe C^n sur un intervalle I contenant 0 alors, au voisinage de 0, on a :*

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)}$$

*Cette égalité est appelée **formule de Taylor-Young à l'ordre** n **en 0**. Elle fournit le $DL_n(0)$ de f.*

Remarque 6.7. Les formules de Taylor précédentes (Taylor avec reste intégral, Taylor-Lagrange) étaient globales, celle-ci est locale : on a une approximation de f au voisinage de 0 par un polynôme.
Notez l'hypothèse : "f de classe C^n sur I" pour avoir la formule de Taylor-Young à l'ordre n, tandis que c'était "f de classe C^{n+1} sur I" pour le même ordre n dans les formules de Taylor-Lagrange.

Exemple 6.8.

1. Appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 0 en 0 pour la fonction exp.

   exp est C^∞ et donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $exp(x)=1+o(1)$
2. Appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour la fonction sin.

   sin est C^∞ et donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $sin(x)=0+x+0x^2/2-x^3/6+o(x^3)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$
3. Appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour la fonction $x\mapsto\sqrt{1+x}$. $x\mapsto\sqrt{1+x}$ est $C^\infty(]-1;+\infty[)$ et donc pour tout $x\in]-1;+\infty[$: $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)$

6.3 Développements limités usuels

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir les développements limités au voisinage de 0 suivants, à connaitre par coeur :

— $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

— $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.

— $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.

— Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

— $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

On déduit de ces DL, ceux de :

— $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.

— $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

— $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$.

— $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

Exemple 6.9. — Le $DL_3(0)$ de $(x \mapsto \ln(1-x))$ est : $ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

et le $DL_3(0)$ de $(x \mapsto \ln(1+x))$ est : $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

— Le $DL_6(0)$ de cos est : $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$

et le $DL_5(0)$ de sin est : $sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$

6.4 Opérations sur les développements limités

Proposition 6.10. *(addition) Si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q, alors $f+g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $P+Q$.*

Exemple 6.11. Donner le $DL_3(0)$ de $\sin(x) - \ln(1+x)$.

sin et $x \mapsto ln(1+x)$ admettent des $DL_3(0)$ et pour tout x : $sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Ainsi $sin(x) + ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

Exercice 8. 1. Donner le $DL_{2n+1}(0)$ de $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et de $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ admette des DL à tout ordre, et on a :
$e^x = \sum_{k=0}^{2n+1} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1})$ et $e^{-x} = \sum_{k=0}^{2n+1} \dfrac{(-x)^k}{k!} + o(x^{2n+1})$
Ainsi $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+1})$ et $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + ... + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n+1})$

2. Donner le $DL_n(x_0)$ de exp.
On a que
$e^x = e^{x_0 + x - x_0} = e^{x_0} \times e^{x - x_0}$: on pose $h = x - x_0$ et comme $h \underset{x \to x_0}{\to} 0$ alors :

$$e^x = e^{x_0} \times e^{x - x_0} = e^{x_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} + o_0(h^n) = \sum_{k=0}^{n} e^{x_0} \frac{(x - x_0)^k}{k!} + o_0((x - x_0)^n)$$

3. (défi correction en photo) Donner le $DL_n(\pi/4)$ de sinus.

Proposition 6.12. *(multiplication) Si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q, alors fg admet un $DL_n(0)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit PQ.*

Exemple 6.13. 1. Donner le $DL_3(0)$ de $e^x(1 + sin(x))$.

Comme, pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $1 + sin(x) = 1 + x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ alors en développant le produit et en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à 3, on trouve :

$$e^x(1 + sin(x)) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + x + x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + 2x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

2. Donner le $DL_3(0)$ de $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Comme, pour $x \in \mathbb{R}$, $ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\dfrac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ alors en développant le produit et en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à 3, on trouve :

$$\frac{ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3 + o(x^3) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^6)$$

6.5 Quelques remarques

Commençons par simple : on aurait pû, avant la formule de T-Y, trouver un $DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en utilisant le fait que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ et donc $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$ car $\dfrac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \dfrac{x}{1-x} \underset{x \to 0}{\to} 0$.
En application directe, on peut calculer une division par 9 en approximant : on veut partager une note de 126 euros en 9 :
On a que $\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{10} \dfrac{1}{1 - 1/10} = \dfrac{1}{10}(1 + \dfrac{1}{10} + o(1/10)) \approx \dfrac{1}{10}(1 + \dfrac{1}{10}) = \dfrac{11}{100}$ (car $1/10$ est proche de 0 donc on suppose le $o(1/10)$ négligeable)
Ensuite, on trouve donc $126/9 \approx 126 \times 11/100 = 1386/100 = 13.86$.

Ensuite, un DL ne donne d'information qu'au voisinage de x_0, on évitera donc de déduire quoique ce soit en dehors de ce voisinage.
Par exemple, le DL à l'ordre 2 en 1 : $f(x) = (x-1)^2 + o_1((x-1)^2))$.
On peut affirmer que f est positive au voisinage de 1, par contre, il se peut que f soit négative en dehors de ce voisinage (par exemple si $f(x) = (x-1)^2 - (x-1)^3$: on constate que f tend vers $-\infty$ en $+\infty$)

On a la proposition suivante (admise mais facile à démontrer (à faire pour ceux qui travaille sur les "niveaux 2")) :

Proposition 6.14. *1. Si la fonction f est paire alors les coefficients d'ordre impaire de son DL_0 sont nuls.*
2. Si la fonction f est impaire alors les coefficients d'ordre paire de son DL_0 sont nuls.

Enfin, pour calculer un DL, on évitera d'utiliser la formule de Taylor-Young, sauf pour des ordres faibles, car celles demandent de calculer des dérivées n-ème. On préfera utiliser les additions ou multiplications de DL usuels si possible.

6.6 Des exemples d'utilisation des développements limités

Voici quelques applications pertinentes des DLs prises dans un livre (les corrections des exercices sont disponibles en photo)

Méthode. **Comment effectuer un changement de variable dans un DL ?**

Exemple 1.
Déterminons le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\sin(3t)$. On écrit le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\sin(x)$ par

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0\left(x^4\right).$$

On peut remplacer x par $3t$ puisque $3t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\qquad \sin(3t) = 3t - \frac{9}{2}t^3 + o_0\left(t^4\right).$

Exemple 2.
Donnons le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln(1+t^2)$. Partons du DL usuel :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2).$$

Sachant que $t^2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, en remplaçant x par t^2, on obtient :

$$\ln(1+t^2) = t^2 - \frac{1}{2}t^4 + o_0(t^4).$$

Notons que le DL du logarithme à l'ordre 2 a suffi.

Exercice 25.9. ($\star$). *Exemples.*
Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $t \mapsto \ln(1-3t)$, le $\mathrm{DL}_7(0)$ de $t \mapsto te^{1-t^3}$ puis le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Exercice 25.10. ($\star\star\star$). *Dévelopement de tangente - Méthode 2.*
Donner le développement limité de tangente en 0 à l'ordre 4.
Indication. On pourra partir de la définition $\tan = \sin / \cos$.

Lien entre l'intégration et la dérivation des DLs

Soient f, F deux fonctions. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et que F est une primitive de f sur I (F est donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I). Soit $x_0 \in \mathrm{I}$.

D'après la formule de Taylor-Young, on sait que f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$, notons $\mathrm{P(X)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ sa partie régulière. Ainsi, pour $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = \mathrm{P}(x-x_0) + o_{x_0}\big((x-x_0)^n\big) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o_{x_0}\big((x-x_0)^n\big).$$

On sait que F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(x_0)$, notons $\mathrm{Q(X)} = \sum_{k=0}^{n+1} b_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}]$ sa partie régulière. Ainsi, pour $x \in \mathrm{I}$,

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{Q}(x-x_0) + o_{x_0}\big((x-x_0)^{n+1}\big) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k (x-x_0)^k + o_{x_0}\big((x-x_0)^{n+1}\big).$$

Pour $k \in [\![0;n]\!]$, $\qquad a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \dfrac{\mathrm{F}^{(k+1)}(x_0)}{k!} = (k+1)b_{k+1}.$

Donc $\qquad \mathrm{Q(X)} = \sum_{k=0}^{n+1} b_k \mathrm{X}^k = b_0 + \sum_{k=1}^{n+1} b_k \mathrm{X}^k \underset{\ell=k-1}{=} b_0 + \sum_{\ell=0}^{n} b_{\ell+1} \mathrm{X}^{\ell+1} = b_0 + \sum_{\ell=0}^{n} \dfrac{a_\ell}{\ell+1} \mathrm{X}^{\ell+1}.$

Ainsi Q est une primitive de P. Comme $b_0 = \mathrm{F}(x_0)$,

$$\boxed{\text{Q est la primitive de P qui prend la valeur } \mathrm{F}(x_0) \text{ en } x_0.}$$

Exemple. Considérons les fonctions :

$$f : x \in]-1;+\infty[\mapsto \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \mathrm{F} : x \in]-1;+\infty[\mapsto \frac{1}{1+x}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc $\mathcal{C}^n$) sur son domaine de définition et F est une primitive de f. D'après ce qui précède, on retrouve le $\mathrm{DL}_n(0)$ du logarithme par intégration de la partie régulière :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + o_0(t^n)$$

$$\ln(1+t) = \mathrm{C} + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1} + o_0(t^{n+1}).$$

Pour déterminer la constante d'intégration, il suffit de préciser la valeur en 0. On a $\mathrm{C} = \mathrm{F}(0) = 1$.

Finalement, $\qquad \ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1} + o_0(t^{n+1}).$

Exercice 25.11. ($\star$). Trouver le $\mathrm{DL}_7(0)$ de la fonction arctangente.

Étude des asymptotes

Les développements limités permettent, entre autres, de déterminer des asymptotes aux graphes des fonctions (quand il y en a) et de préciser localement la position.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.

Notons que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

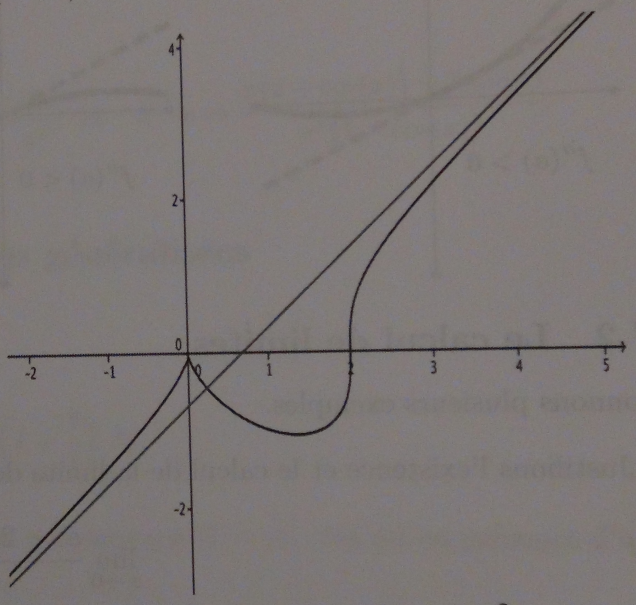
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\left(x^2(x-2)\right)^{1/3}}{\left(x^3\right)^{1/3}} = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{1/3}.$$

Comme $\frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

puis que

$$f(x) = x - \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$



Par conséquent, le graphe de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = x - \frac{2}{3}$, et est, au voisinage de $+\infty$, en-dessous de l'asymptote puisque que pour x suffisamment grand, $f(x) - y \leqslant 0$.

Allure du graphe d'une fonction au voisinage d'un point

Partons d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Young, pour tout x dans un voisinage de a,

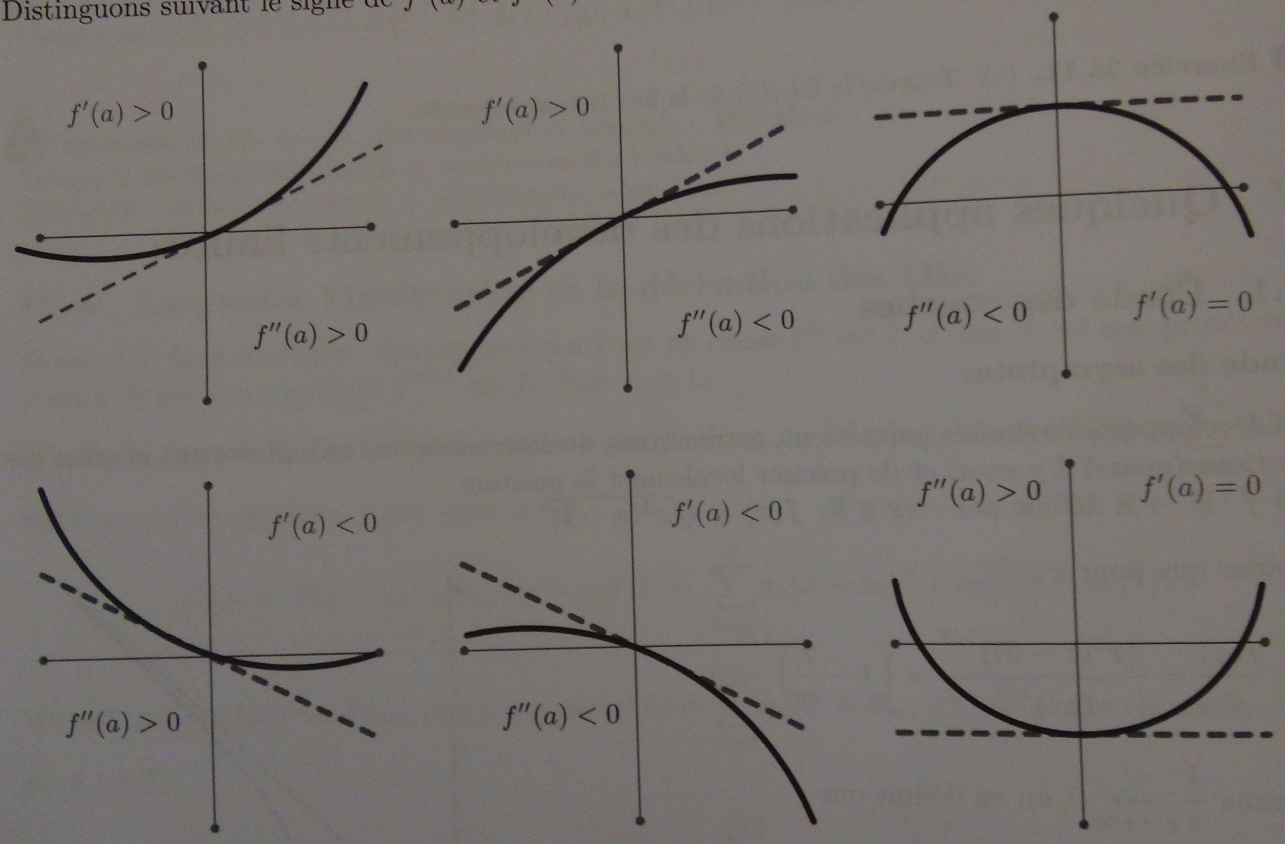
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o_a\big((x-a)^2\big).$$

Graphiquement, au voisinage de a, la courbe représentative de f est "proche" de la courbe d'équation

$$x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

(la suite à la page suivante)

Lorsque $f''(a) \neq 0$, la courbe est une parabole.
Distinguons suivant le signe de $f'(a)$ et $f''(a)$. En gras, la parabole, en pointillés, la tangente.



Le calcul de limites

Donnons plusieurs exemples.

- Justifions l'existence et le calcul de la limite de la forme indéterminée

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 2\sqrt{1+x} + 1}{x^2}.$$

Partons des DLs usuels :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_0(x^2) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o_0(x^2).$$

Par somme,
$$\frac{e^x - 2\sqrt{1+x} + 1}{x^2} = \frac{3/4 \cdot x^2 + o_0(x^2)}{x^2} = \frac{3}{4} + o_0(1)$$

Ainsi, la limite existe et vaut
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 2\sqrt{1+x} + 1}{x^2} = \frac{3}{4}.$$

- Calculons la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(2x) - 2\tan(x) - 2\tan^3(x)}{x^5},$$

à l'aide du $\mathrm{DL}_5(0)$ de tangente
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5).$$

Le dénominateur x^5 suggère de chercher un développement limité d'ordre 5 de $\tan(2x) - 2\tan(x) - 2\tan^3(x)$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \tan(2x) - 2\tan(x) = 2x + \frac{8x^3}{3} + \frac{64x^5}{15} - 2x - \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^5}{15} + o(x^5) = 2x^3 + 4x^5 + o_0(x^5)$$

et

$$\begin{aligned}
\tan^3(x) &= \left(x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{2x^5}{15} + o_0(x^5)\right)^3 = x^3\big(1 + u(x)\big)^3 \quad \text{où} \quad u(x) = \tfrac{x^2}{3} + \tfrac{2x^4}{15} + o_0(x^4) \sim \tfrac{x^2}{3} \\
&= x^3\big(1 + 3u(x) + o_0(u(x)^2)\big) \\
&= x^3\big(1 + x^2 + o_0(x^2)\big) \\
\tan^3(x) &= x^3 + x^5 + o_0(x^5).
\end{aligned}$$

Par sommation, on obtient $\tan(2x) - 2\tan(x) - 2\tan^3(x) = 2x^5 + o_0(x^5)$. Nous pouvons donc conclure que la limite existe et vaut 2.

Exercice 25.12. Calculer la limite en 0 de :

$$f : x \mapsto \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2}, \quad g : x \mapsto \frac{1}{\big(\sin(x)\big)^2} - \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{x\big(2 + \cos(x)\big) - 3\sin(x)}{x^3\big(1 - \cos(x)\big)}.$$

Étude des séries et des intégrales généralisées

Donnons des exemples.

- Étudions la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t.$$

Posons pour tout $t \geqslant 1$, $f(t) = \dfrac{1}{t} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)$. f est continue sur $[1; +\infty[$. On est en présence d'une intégrale généralisée en $+\infty$.

<u>Étude en $+\infty$</u>. On a le développement limité :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o_0\left(x^2\right).$$

Pour $x = 1/t$, avec $\dfrac{1}{t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $\quad \ln\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2t^2} + o_0\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{t} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t^2}$.

Précisons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann convergente en $+\infty$ ($2>1$). Par le critère d'équivalence dans le cas positif, on a convergence de l'intégrale.

- Étudions la convergence de la série de terme général :

$$n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

On connaît le développpement limité : $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o_0\left(x^3\right).$

Comme $1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, en remplaçant x par $1/n$, il vient

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o_0\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}.$$

$\sum u_n$ est une série à termes positifs dont le terme général est équivalent au terme général d'une série de Riemann convergente $(3 > 1)$. Par le critère d'équivalence, la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 25.13. $(\star)$. *Exemples.*

1. Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = e^{-3/n} - \cos(1/n) + 3\sin(1/n) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n}\left(e^n - 1\right).$$

2. Étudier la convergence des intégrales généralisées :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{e^t - \sqrt{1+2t}}.$$