Chapitre 21 : Dimension d'un ev et rang d'une famille.

1 Espace vectoriel de dimension finie - espace vectoriel de dimension infinie

Définition 1.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemple 1.2.

— $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ sont de dimension finie, puisque leur base canonique est une famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments.

Rappel : base canonique de $\mathbb{R}^n$: $\{(1,0,...,0),(0,1,0...,0),...,(0,...,0,1)\} = \{e_1,...,e_n\}$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, sa base canonique fournissant une famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments.

Rappel : base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$: $\{1,X,X^2,...,X^n\}$

— $\mathbb{R}[X]$ est de dimension INFINIE. Voyons pourquoi :
Supposons par l'absurde que $\mathbb{R}[X]$ soit de dimension finie alors $\mathbb{R}[X]$ admet une famille génératrice de cardinal fini : ainsi il existe une famille $\{P_1,...,P_n\}$ qui soit une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$, et dont on suppose, quitte à réordonner les termes, que $deg(P_n) \geqslant deg(P_k)$ pour tout $k \in [[1,n-1]]$.
Ainsi comme $Vect(P_1,...,P_n) = \mathbb{R}[X]$ alors tout P de $\mathbb{R}[X]$ est combinaison linéaire de $P_1,...,P_n$. En particulier, il existe $a_1,...,a_n \in \mathbb{R}$, $XP_n = \sum_{k=1}^{n} a_kP_k$.
Ceci est absurde car $deg(XP_n) = deg(X)+deg(P_n) = deg(P_n)+1$ et $deg(\sum_{k=1}^{n} a_kP_k) \leqslant max(deg(a_1P_1),deg(a_2P_2),...,deg(a_nP_n))$ $deg(P_n)$.
Ainsi il ne peut pas exister de famille génératrice de cardinal fini.

1.1 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Extraction de base

Proposition 1.3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit á $\{0\}$, et $(v_1,\cdots,v_n)$ une famille génératrice de E. Il existe une sous-famille de $(v_1,\cdots,v_n)$ qui est une base de E. (**on peut extraire une base d'une famille génératrice finie de** E)*

Démonstration. On regarde si $(v_1,\cdots,v_n)$ est libre. Si oui, c'est une base et on a terminé.

Sinon, c'est qu'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres. Supposons, quitte á ré-ordonner les vecteurs, que ce soit v_n. On a alors $\text{Vect}\left(v_1,\cdots,v_{n-1},v_n\right) = \text{Vect}\left(v_1,\cdots,v_{n-1}\right) = E$.

On regarde si la famille $(v_1,\cdots,v_{n-1})$ est libre. Si oui, c'est une base et on a terminé. Sinon ...

On recommence, jusqu'á obtenir une base, ce qui arrivera étant donné que $E \neq \{0\}$ (il restera donc au moins un vecteur non nul dans la famille génératrice).

$\square$

Remarque 1.4. Cette proposition montre que dans un espace vectoriel de dimension finie non réduit á $\{0\}$, il existe au moins une base.

Une petite question : prenons un espace vectoriel E admettant une famille génératrice de cardinal 1, donc $E = \text{vect}(u)$ oú $u \in E$ et on suppose $u \neq 0_E$. Peut-on former des familles libres de E ? Si oui, comment ?

Proposition 1.5. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si L est une famille libre finie et G une famille génératrice finie, alors* $\text{Card}(L) \leq \text{Card}(G)$.

Proposition admise, se démontre par récurrence sur $n = Card(G)$.

Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 1.6. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit á $\{0\}$. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.* ***La dimension de** E **est par définition le cardinal d'une base quelconque de** E.* *Par convention, on pose* $\text{Dim}\{0\} = 0$ *et ce sous-espace très particulier est le seul à avoir cette dimension.*

Démonstration. Soit B_1 et B_2 deux bases de E, montrons que B_1 et B_2 ont même cardinal.
Comme B_1 est libre, et que B_2 est génératrice de E alors $card(B_1) \leqslant card(B_2)$.
Mais comme B_2 est libre, et que B_1 est génératrice de E alors $card(B_2) \leqslant card(B_1)$.
Ainsi $Card(B_1) = Card(B_2)$.
Ainsi toutes les bases de E ont même nombres d'éléments. □

Exemple 1.7. Exemples fondamentaux : Connaissant les bases canoniques des espaces vectoriels suivants, on a :

$$\boxed{\text{Dim}\,\mathbb{R}^n = n \;\; ; \;\; \text{Dim}\,\mathbb{R}_n[X] = n+1 \;\; ; \;\; \text{Dim}\,\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}) = np}$$

Théorème 1.8. *(de la base incomplète), admis : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L} = \{e_1, ..., e_p\}$ une famille libre de E, ainsi que $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Il existe $\{f_1, ..., f_m\} \subset G$ telle que $\{e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_m\}$ soit une base. (**on peut compléter une famille libre, avec une partie d'une famille génératrice, en une base de** E)*

Voici maintenant un théorème <u>très utile</u> :

Théorème 1.9. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit á $\{0\}$, donc tel que* $\text{Dim}\,E = n \geq 1$.
- *Toute famille **génératrice** de E a **au moins** n vecteurs. Si elle en a n exactement, c'est une base de E.*
- *Toute famille **libre** de E a **au plus** n vecteurs. Si elle en a n exactement, c'est une base de E.*

Démonstration. Soit G une famille génératrice. Par la proposition 1.3, on peut extraire une base de G : notons la B. Comme $B \subset G$ alors $n = card(B) \leqslant card(G)$.
De plus si $card(G) = n$, comme $B \subset G$ et $card(B) = card(G)$ alors $B = G$.

Soit L une famille libre. Alors on peut la compléter en une base (en utilisant la famille génératrice triviale : tout l'espace, par exemple), que l'on note B'.
Alors $L \subset B'$, donc $card(L) \leqslant n = Card(B)$.
De plus, si $Card(L) = n$ alors comme $L \subset B'$ et $Card(B') = Card(L)$ alors $L = B'$.
□

Exemple 1.10. Dans E espace vectoriel de dimension 3 :
- que peut-on dire d'une famille contenant 4 vecteurs ? Est-ce qu'elle peut être une base ? une famille libre ? une famille génératrice ? Elle ne peut ni être libre, ni une base, mais peut être génératrice (attention elle n'en est pas forcément une !)
- que peut-on dire d'une famille contenant 2 vecteurs ?
  Elle ne peut ni être génératrice, ni une base, mais peut être libre (attention elle n'en est pas forcément une !)
- Si on se donne trois vecteurs, par exemple $u = (1,2,3)$, $v = (-1,0,5)$ et $w = (3,4,0)$, comment faire pour savoir si la famille (u,v,w) forme une base de $\mathbb{R}^3$? Il suffit de montrer qu'elle est libre OU génératrice (laisser au lecteur)
- Montrer que la famille $\left(1, 1+X, 1+X+X^2\right)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Notons B cette famille. Comme $Card(B) = dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ alors il suffit de montrer que cette famill est libre (ou génératrice).
  Comme c'est une famille de polynôme de degré deux à deux distincts, elle est libre.
  Ainsi c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 Dimension d'un sous-espace vectoriel dans un espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 2.1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.*

- *Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et on a* $\operatorname{Dim} F \leq \operatorname{Dim} E$.
- *Si un sous-espace vectoriel F de E est tel que* $\operatorname{Dim} F = \operatorname{Dim} E$*, alors $F = E$.*
- *Soit deux sous-espaces vectoriels F et G de E. On a :* $\begin{cases} F \subset G \text{ et} \\ \operatorname{Dim} F = \operatorname{Dim} G \end{cases} \Rightarrow F = G$.

Démonstration. Montrons d'abord que F admet une famille génératrice finie.
Démo difficile : Si $F = \{0\}$, il n'y a rien à montrer, sinon on peut trouver une famille libre de F.
Comme les familles libres de F sont des familles libres de E alors le cardinal d'un famille libre de F est inférieur à $n = dim(E)$.
On peut donc prendre L une famille libre de F de cardinal maximal.
Montrons que c'est une base.
Soit $v \in F$, alors $L \cup \{v\}$ n'est pas libre car sinon on aurait une famille libre de cardinal strictement supérieur à celui de L.
Ainsi $L \cup \{v\}$ est liée, et donc comme L est libre alors v est CL de L. Ainsi $v \in Vect(L)$. Ceci est vraie pur tout $v \in L$.
Ainsi $Vect(L) = F$, et donc L est une famille génératrice finie de F.

Considérons une base de F, notée B, alors il s'agit d'une famille libre de F qui est aussi une famille libre de E. Donc $dim(F) = Card(B) \leqslant dim(E)$.
Si on suppose maintenant que $dim(F) = dim(E)$ alors avec la même famille L, $card(L) = din(F) = dim(E)$ donc L est aussi une base de E.
Ainsi $F = Vect(L) = E$.
(Un raisonnement semblable permet de montrer le point 3 : on utilise le fait que, comme $F \subset G$, alors une base de F est une famille libre de G)

□

Exemple 2.2.

1. Déduire du fait que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ á valeurs dans $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{R}[X]$ que E est de dimension infinie :
   Supposons que E soit de dimension finie, alors comme $\mathbb{R}[X] \subset E$ alors $\mathbb{R}[X]$ serait de dimension finie, ce qui est absurde.
   Ainsi E est de dimension infinie.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel : $G = \operatorname{Vect}\big((1,1,-2),(1,0,-1),(3,1,-4),(0,1,-1)\big)$.
   Déterminer sa dimension.
   On sait que $B = ((1,1,-2),(1,0,-1),(3,1,-4),(0,1,-1))$ n'est pas libre dans $\mathbb{R}_3$ à cause de son cardinal.
   On remarque que $(1,1,-2)+2(1,0,-1) = (3,1,-4)$ donc $G = \operatorname{Vect}\big((1,1,-2),(1,0,-1),(0,1,-1)\big)$
   On remarque aussi $(1,1,-2)-(1,0,-1) = (0,1,-1)$ et donc $G = \operatorname{Vect}\big((1,1,-2),(1,0,-1)\big)$ et $\big((1,1,-2),(1,0,-1)\big)$ est trivialement libre, il s'agit donc d'une base de G qui est de dimension 2.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel : $F = \operatorname{Vect}\big((1,-1,1),(1,2,0),(1,1,0)\big)$. Montrer que $F = \mathbb{R}^3$.
   Comme $F \subset \mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que $dim(F) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$.
   On montre pour cela que la famille $\big((1,-1,1),(1,2,0),(1,1,0)\big)$ est libre, ce qui est le cas car :
   Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$, tels que $a(1,-1,1)+b(1,2,0)+c(1,1,0) = (0,0,0)$ alors $\begin{cases} a+b+c & = & 0 \\ -a+2b+c & = & 0 \\ a & = & 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$
   Ainsi $\big((1,-1,1),(1,2,0),(1,1,0)\big)$ est une base de F et donc F est de dimension 3. Donc par ce qui est dit ci-dessus, $F = \mathbb{R}^3$.
4. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels :
   $F = \operatorname{Vect}\big((1,1,1,1),(1,0,1,0)\big)$ et
   $G = \operatorname{Vect}\big((0,1,0,1),(-1,1,-1,1)\big)$. Montrer que $F = G$. Montrons que $F \subset G$ et que $dim(F) = dim(G)$: ce dernier point est simple car les deux familles concidérées sont trivialement libre, et bien sûr génératrice de leur 'vect' donc $dim(F) = 2 = dim(G)$.
   Soit $x \in F$ alors $x = a(1,1,1,1)+b(1,0,1,0) = (a+b,a,a+b,a)$.
   Soit $c,d \in \mathbb{R}$, $(a+b,a,a+b,a) = c(0,1,0,1)+d(-1,1,-1,1) \iff (a+b,a,a+b,a) = (-d,c+d,-d,c+d) \iff a+b = -d$ et $a = c+d \iff d = -a-b$ et $c = a-d = 2a+b$
   Ainsi $x = (3a+b)(0,1,0,1)+(-a-b)(-1,1,-1,1)$ et donc $x \in G$.
   (On remarque qu'il aurait suffit de montrer que $(1,1,1,1),(1,0,1,0) \in G$ car G est stable par CL).
   Ainsi $F = G$.

Définition 2.3. — Tout espace vectoriel ou sous-espace vectoriel de dimension 1 est appelé "**droite vectorielle**". Tout espace vectoriel ou sous-espace vectoriel de dimension 2 est appelé "**plan vectoriel**".
— Dans un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ est appelé "**hyperplan** de E".

Exemple 2.4. Dans $E = \mathbb{R}^4$, montrer que $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y = z+t\}$ est un hyperplan de E.
On trouve une base de F : on laisse ici le soin au lecteur de le faire, on peut par exemple trouver $\{(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}$ comme base de F.
Ainsi $dim(F) = 3 = 4-1$ donc F est un hyperplan de E.

3 Rang d'une famille de vecteurs.

Définition 3.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie). Soit $(v_1,\cdots,v_n)$ une famille finie de vecteurs de E. Le **rang** de cette famille est par définition :

$$\boxed{\text{rang}(v_1,\cdots,v_n) = \dim\left(\text{vect}(v_1,\cdots,v_n)\right)}$$

Exemple 3.2. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :
$u_1 = (1,0,0,1)$, $u_2 = (0,0,1,1)$, $u_3 = (0,0,2,2)$, $u_4 = (0,1,1,0)$.
Déterminer le rang des familles suivantes : (u_1), (u_1,u_2), (u_1,u_2,u_3), (u_1,u_2,u_3,u_4).
Comme (u_1) est libre alors (u_1) est une base de $Vect(u_1)$ donc $rg(u_1) = 1$
On montre facilement que (u_1,u_2) est libre et donc $rg(u_1,u_2) = dim(Vect(u_1,u_2)) = 2$.
(u_1,u_2,u_3) est trivalement liée car $u_3 = 2u_2$ et donc $Vect(u_1,u_2,u_3) = Vect(u_1,u_2)$ et comme (u_1,u_2) est libre alors $rg(u_1,u_2,u_3) = 2$.
De même, (u_1,u_2,u_3,u_4) est liée et $Vect(u_1,u_2,u_3,u_4) = Vect(u_1,u_2,u_4)$ et comme la famille (u_1,u_2,u_4) est libre (montrer le) alors $rg(u_1,u_2,u_3,u_4) = 3$.

Remarque 3.3.
1. Soit $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E. Alors $rg(\mathscr{F}) \leqslant dim(E)$ avec égalité ssi $\mathscr{F}$ est génératrice de E.
2. Soit $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E. Alors $rg(\mathscr{F}) = card(\mathscr{F})$ ssi la famille $\mathscr{F}$ est libre.

Démonstration. 1) En effet, si E est de dimension infinie, il n'y a rien à montrer, sinon comme $rg(\mathcal{F}) = dim(Vect(\mathcal{F}))$ et comme $Vect(\mathcal{F})$ est un sev de E alors $rg(\mathcal{F}) = dim(Vect(\mathcal{F})) \leqslant dim(E)$.
De plus, si $rg(\mathcal{F}) = dim(E) = dim(Vect(\mathcal{F}))$ et donc comme $Vect(\mathcal{F}) \subset E$ alors $Vect(\mathcal{F}) = E$ et donc $\mathcal{F}$ est génératrice de E.
Réciproquement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E alors $Vect(\mathcal{F}) = E$ et $dim(E) = dim(Vect(\mathcal{F})) = rg(\mathcal{F})$

2) Supposons que $rg(\mathcal{F}) = Card(\mathcal{F})$ alors $dim(Vect(\mathcal{F})) = Card(\mathcal{F})$ est donc $\mathcal{F}$ est génératrice de $dim(Vect(\mathcal{F}))$ et par cardinalité, elle en est une base, donc est libre.
Réciproquement, si $\mathcal{F}$ est libre, c'est une base de $Vect(\mathcal{F})$ et $rg(\mathcal{F}) = dim(Vect(\mathcal{F})) = Card(\mathcal{F})$ □