Chapitre 13 : Dérivations des fonctions réelles

Dans ce chapitre, on considère des fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 Dérivation en un point : taux d'accroissement

Rappels : dérivabilité en un point

Définition 1.1. Soit $x_0 \in I$.

1. Si $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ existe et est finie, on dit que f est **dérivable en** x_0, et on note $f'(x_0)$ cette limite (c'est le nombre dérivé en x_0).
   On rappelle que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelé taux d'accroissement de f en x_0.
2. Dans un repère du plan, la droite passant par le point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$ est appelée tangente à la courbe représentative de f en M_0. Son équation est $\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$.
3. Si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, la fonction f n'est pas dérivable en x_0, mais on dit que la courbe représentative de f admet une tangente verticale en M_0.
4. Si $\boxed{\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ existe et est finie, on dit que f est **dérivable à droite en** x_0,
   et on note la limite $f'_d(x_0)$. La courbe représentative de f admet une demi-tangente à droite en M_0 de coefficient directeur $f'_d(x_0)$.
   Si $\boxed{\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ existe et est finie, on dit que f est **dérivable à gauche en** x_0,
   et on note la limite $f'_g(x_0)$. La courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche en M_0 de coefficient directeur $f'_g(x_0)$.

Remarque 1.2. En posant $x = x_0+h$, l'étude de $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ équivaut à l'étude de $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ avec égalité en cas d'existence. Cela permet de se ramener à une limite en 0 pour toute étude de dérivabilité.

Proposition 1.3. *Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche avec l'égalité $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*
On a alors $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 1.4.

1. La fonction $(x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R})$ n'est pas dérivable en 0, mais la courbe représentative de cette fonction admet une tangente verticale en O.

   En effet, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

   Par contre, la fonction $(x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x\sqrt{x} \in \mathbb{R})$ est dérivable en 0 :

   En effet, $\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, ainsi $f : (x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x\sqrt{x} \in \mathbb{R})$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

   Remarque 1.5. Pour ces deux fonctions non définies à gauche de 0, la notion de dérivabilité à droite se confond avec celle de dérivabilité tout court.

2. La fonction valeur absolue est dérivable à gauche et à droite en $x_0 = 0$, mais n'est pas dérivable en 0.
   On a $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.
   En effet, $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$ et :

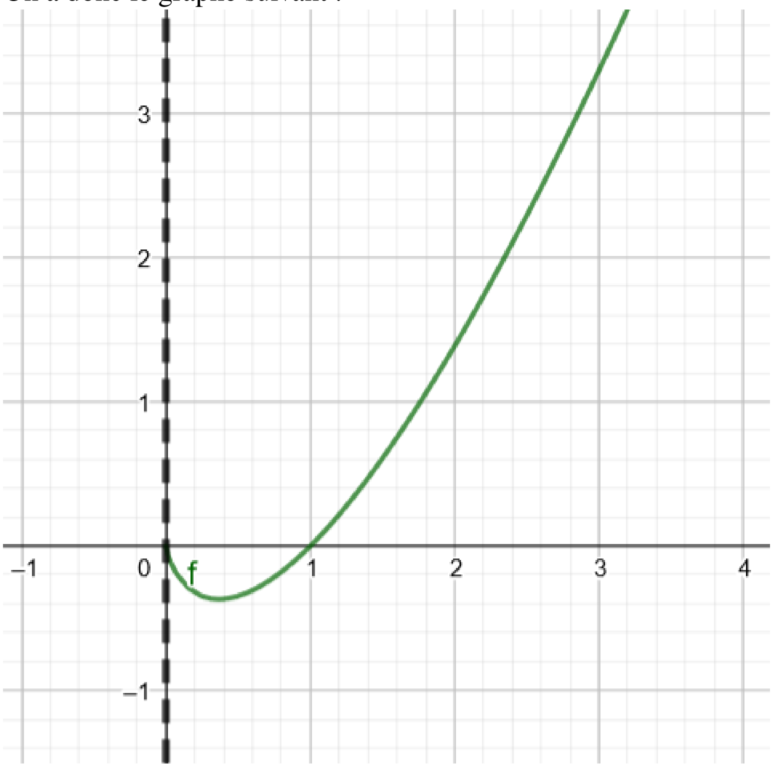
En effet, $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$.
La fonction n'est pas dérivable en 0, comme $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ n'existe pas.

Etudier la dérivabilité de la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto |x^2 - x|$ en $x_0 = 1$:

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = |x||x-1|$.
De plus, $\lim_{x\to 1^-} \frac{|x||x-1|-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x\frac{-(x-1)}{x-1} = -1$ donc g est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = -1$.
Mais $\lim_{x\to 1^+} \frac{|x||x-1|-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x\frac{x-1}{x-1} = 1$ donc g est dérivable à droite en 1 et $g'_d(1) = 1$.
Ainsi g n'est pas dérivable en 1.

3. Soit $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} x(\ln x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f est continue en 0 puis étudier la dérivabilité de f en 0. Etudier les variations de f puis tracer l'allure de son graphe en soignant le détail au voisinage de 0.

f est trivialement continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ par C.C..
De plus $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$ et donc f n'est pas dérivable en 0 mais admet une tangente horizontale d'équation $x = 0$.
Pour tout $x > 0$, $f'(x) = ln(x) + 1$.
Or $ln(x) + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant e^{-1}$.
Ainsi f est croissante sur $]e^{-1}; +\infty[$ et décroissantz $]0; e^{-1}[$.
Enfin, $f(e^{-1}) = -e^{-1} = \frac{-1}{e}$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
On a donc le graphe suivant :



4. Donner le nombre dérivé de la fonction inverse en $a \neq 0$ en utilisant le taux d'accroissement.
Soit $a \neq 0$, $\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = \frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-1}{xa} = -\frac{1}{a^2}$

Développement limité d'ordre 1

Proposition 1.6. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est dérivable en a et $f'(a) = \lambda$.*
2. *Il existe λ et une fonction ε tels que : $\forall x \neq a$:*

$$f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

Démonstration. On a donc :
$\Rightarrow$) Supposons que f soit dérivable en a et que $f'(a) = \lambda$.
On a donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda$ et donc pour tout $x \neq a$,
$f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lambda)$, ce qui est ce que l'on voulait obtenir, $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lambda$, et on a bien $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\to} 0$
$\Leftarrow$) Si on suppose qu'il existe λ et une fonction ε, tel que pour tout $x \neq a$,

$$f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

Alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \lambda + \varepsilon(x) = \lambda$ et donc f est dérivable en a et $f'(a) = \lambda$. □

Proposition 1.7. *Si f est dérivable en $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0.*

Démonstration. Soit f une fonction dérivable en $x_0 \in I$ alors il existe λ et une fonction ε, tel que pour tout $x \neq x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ et donc f est continue en x_0. □

Attention à la réciproque qui est fausse ! ! Le contre-exemple usuel est la fonction valeur absolue qui est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

2 Fonction dérivée

La fonction dérivée

Définition 2.1. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I, et on note f' la fonction (dite fonction dérivée) $f' : x \in I \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.2. *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I mais la réciproque est fausse.*

La fonction dérivée

Définition 2.3. Un fonction dérivable sur I et dont la fonction dérivée est continue est dite $C^1(I,\mathbb{R})$

Exemple 2.4. Les fonctions polynômes, exponentielles, logarithmes, sin, cos, tan, ... sont C_1 sur leur ensemble de définition, ainsi que des sommes, produits, composée quotient de celles ci, la où elles sont définies.

2.1 Les dérivées usuelles

Dérivabilité des fonctions usuelles

Théorème 2.5. *On a le tableau suivant :*

$f(x)$	$f'(x)$	*Ensemble de dérivabilité*
a (constante	0	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
x^a $(a \in \mathbb{R}^*)$	ax^{x-1}	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$cos(x)$	$-sin(x)$	$\mathbb{R}$
$sin(x)$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$
a^x $(a > 0)$	$(ln(a))a^x$	$\mathbb{R}$
$tan(x)$	$1 + tan(x)^2$ *ou* $\frac{1}{cos(x)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Démonstration. Traitons par exemple le cas de $x \mapsto \sqrt{x}$:
Soit $a \neq 0$, $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. □

Remarque 2.6. On retrouve les dérivées dans les cas x^n, $\frac{1}{x^n}$, $\sqrt{x}$ avec la dérivée de x^a (attention, cependant, x^n est dérivable en 0 mais x^a pas nécessairement) :
En effet :
Pour tout $x \neq 0$, $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$, donc $(\frac{1}{x^n})' = (x^{-n})' = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$.
Pour tout $x \neq 0$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$, donc $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2.2 Les règles de dérivations

Opérations et dérivations

Théorème 2.7. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivable sur I et λ un réel.*

1. *On a alors $f+g$, λf, fg sont dérivables sur I, et* $\boxed{(f+g)' = f'+g'}$, $\boxed{(\lambda f)' = \lambda f'}$ *et* $\boxed{(fg)' = f'g+fg'}$.
2. *Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I, et* $\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}}$, $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}}$.
3. *Les fonctions suivantes sont dérivables sur leur ensemble de définition, sauf $(x \mapsto x^\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ dont la dérivabilité en 0 dépend de α :*
   les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, $(x \mapsto x^\alpha)$, sin, cos, tan, exp, $(x \mapsto \ln(|x|))$.

Démonstration. Traitons par exemple le cas 2 :
Soit g une fonction dérivable sur I qui ne s'annule pas et f une fonction dérivable sur I.

Soit $a \in I$, $\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(a)-g(x)}{x-a} \frac{1}{g(x)g(a)} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$, ainsi $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $(\frac{1}{g})'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$.
De plus, $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et donc par le point 1, comme f et $\frac{1}{g}$ sont dérivables, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable et $(\frac{f}{g})' = f' \times \frac{1}{g} + f \times (\frac{1}{g})' = f' \times \frac{1}{g} + f \times (\frac{-g'}{g^2}) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$. □

Composées et dérivations

Théorème 2.8. *Si g est dérivable sur I et f est dérivable sur $g(I)$, alors $f \circ g$ est dérivable sur I et* $\boxed{(f\circ g)' = (f'\circ g)\times g'}$.

Dérivations des fonctions réciproque

Théorème 2.9. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Supposons f dérivable en x_0. Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$, et alors*
$(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'\big(f(x_0)\big) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}$.

Démonstration. lorsque f dérivable en x_0 : On prend y_0 et y dans $J = f(I)$. On peut donc poser $y_0 = f(x_0)$ et $y = f(x)$ avec $(x, x_0) \in I^2$.

Le taux d'accroissement en y_0 pour la fonction f^{-1} (et la variable y) est égal à :

$$\lim_{y\to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y\to f(x_0)} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Faisons maintenant tendre y vers y_0. Par continuité de f^{-1} (théorème de la bijection monotone), on a $f^{-1}(y)$ qui tend vers $f^{-1}(y_0)$, c'est-à-dire x qui tend vers x_0.

La limite du taux d'accroissement en y_0 pour la fonction f^{-1} est donc égal à :

$$\lim_{y\to f(x_0)} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

À condition que cette limite existe, mais c'est le cas si $f'(x_0) \neq 0$, car alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.
Ainsi dans ce cas,

$$\lim_{y\to f(x_0)} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

□

Remarque 2.10. (admise) Si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} admet une tangente verticale en y_0.

Si f n'est pas dérivable en x_0, mais que f admet une tangente verticale en x_0, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0) = 0$.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, strictement monotone, dérivable sur I telle que f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et $\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}}$.

L'exemple de arctan

Proposition 2.11. *La fonction* arctan *est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,* $\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

Démonstration : La fonction *tan* est continue et strictement monotone sur $]-\pi/2;\pi/2[$ et de plus et elle est dérivable, pour tout $x \in]-\pi/2,\pi/2[$, $tan'(x) = 1 + tan^2(x) > 0$. Ainsi $tan'(arctan(x)) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$arctan'(x) = \frac{1}{(1+tan^2)(arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Remarque 2.12. La formule $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ montre que le signe de $(f^{-1})'$ est celui de f' donc on retrouve le fait que f et f^{-1} ont le même sens de variation.

En cas d'oubli de la formule donnant $(f^{-1})'$, on peut encore s'en sortir ... à condition de connaitre la formule de dérivation d'une fonction composée ! On part de $f \circ f^{-1} = Id$ et on dérive : $(f \circ f^{-1})' = (f^{-1})' \times f'(f^{-1}) = 1 = (Id)'$.

3 Les extremums et le théorème de Rolle

Extremum

Définition 3.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f admet un **minimum** (resp. maximum) **local** en x_0 si il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $f(x) \geq f(x_0)$ (resp. $f(x) \leq f(x_0)$).
On dit que f admet un **extremum local** en x_0 lorsque f admet un minimum ou un maximum local en x_0.

Exemple 3.2. On regarde : non fait ici.

Extremums et annulation de la dérivée (admis)

Proposition 3.3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.*

$$\begin{cases} f \text{ admet un extremum local en } x_0 \\ f \text{ est dérivable en } x_0 \\ x_0 \text{ n'est pas une extrémité de } I \end{cases} \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

Démonstration. En effet, Supposons que f admette un maximum local en x_0 (la preuve dans le second cas est semblable).
Alors pour tout $x \geqslant x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$, donc au passage à la limite quand $x \to x_0$, comme f est dérivable en x_0, $f'(x_0) \geqslant x_0$.
Et pour tout $x \leqslant x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, donc au passage à la limite quand $x \to x_0$, comme f est dérivable en x_0, $f'(x_0) \leqslant x_0$.
Ainsi $f'(x_0) = 0$. □

Remarque 3.4.
- Dans cette proposition, la troisième hypothèse n'est pas superflue. Pourquoi ?
  Faire l'exemple d'une fonction croissante sur $[0,1]$, par exemple $x \mapsto x^2$ et constater que $f'(1) \neq 0$ mais que 1 respecte les 2 premières conditions.
- Et la réciproque ? Si on a $f'(x_0) = 0$, cela implique-t-il l'existence d'un extremum local en x_0 ? Non, regarder la fonction $x \mapsto x^3$ en 0.

Rolle

Théorème 3.5. *Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. f est continue sur $[a,b]$ donc f est borne et atteint ses bornes en c et d. Notons donc $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x) = m = f(c)$ et $\max\limits_{x \in [a,b]} f(x) = M = f(d)$.
Deux cas possibles, soit c ou d n'est pas sur les bords de l'intervalle, disons c (identique avec d), alors comme f est dérivable en c et que $f(c)$ est un extremum local (même global) de la fonction alors $f'(c) = 0$ avec $c \in]a,b[$.
Soit c et d sont sur les bords de l'intervalle, et alors comme $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = m = M$, alors la fonction est constante (son min et son max sont égaux) et donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a,b[$. □

4 Égalité et inégalité des accroissements finis

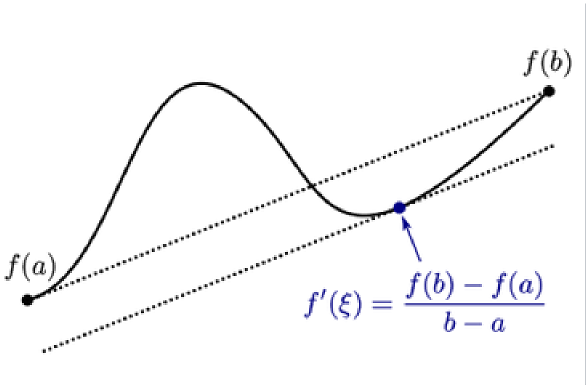
Dans tout ce paragraphe, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

4.1 Égalité des accroissements finis

Égalités des accroissements finis

Théorème 4.1. *Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Illustration :



Démonstration. Pour tout réel x de $[a,b]$, posons $g(x) = f(x) - x\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

La fonction g ainsi définie est continue sur le segment $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ puisque f l'est :

De plus, $g(a) = f(a) - a\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f(a)(b-a)-af(b)+af(a)}{b-a} = \dfrac{f(a)b-af(b)}{b-a}$ et $g(b) = f(b) - b\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f(b)(b-a)-}{b}$
$\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a} = g(a)$.

Ainsi g respecte le th. de Rolle, et donc il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$ c'est à dire $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

□

Exemple 4.2. Exercice d'application classique :
Montrer qu'étant donné un réel $x > 0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \dfrac{1}{c}$,
puis en déduire que $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.
Correction : On note f la fonction ln définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x > 0$, comme f est continue sur $[x, x+1] \subset \mathbb{R}_+^*$, et f est dérivable sur $]x, x+1[\subset \mathbb{R}_+^*$ et donc il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $ln(x+1) - ln(x) = ln'(c)(x+1-x) = \dfrac{1}{c}$
Ainsi $c \in]x, x+1[$ et donc $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}$, et donc $\dfrac{1}{x+1} < ln(x+1) - ln(x) < \dfrac{1}{x}$.

4.2 L'inégalité des accroissements finis

Inégalités des accroissements finis

Théorème 4.3.
- *Version 1 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $\forall x \in]a,b[$, $m \leq f'(x) \leq M$ avec m et M constantes, alors on a $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.*
- *Version 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq k$ avec k constante positive, alors on a : $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$*

Démonstration. On démontrera la version 2.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall t \in I$, $|f'(t)| \leqslant k$.
Soit pour tout $x, y \in I$, alors par le TAF, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$ et donc $|f(x) - f(y)|f'(c)||x-y| \leqslant k|x-y|$ (car $|x-y| \geqslant 0$). □

Exemple 4.4. Exercices d'application classique :

1. Trouver une constante M telle que $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin(x) - \sin(y)| \leq M|x-y|$. Justifier.
   On applique l'IAF sur $\mathbb{R}$ avec la fonction sin qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en sachant que pour tout $t \in$, $|sin'(t)| = |-cos(t)| \leqslant 1$.
   Ainsi pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|sin(x) - sin(y)| \leqslant |x-y|$
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$
   Direct avec $y = 0$.

4.3 Un exemple d'étude d'une suite définie par récurrence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1-u_n^2}{4}$.

1. Donner les variations de $f(x) = \dfrac{1-x^2}{4}$.
   Trivial, la fonction est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$ et $f(0) = 1/4$.
2. Vérifier que $I = [0,1]$ est stable par f et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
   Soit $0 \leqslant x \leqslant 1$ et donc par décroissance de f, $1/4 = f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(1) = 0$ et donc $f(x) \in [0,1]$, on a donc montré que $f(I) \subset I$.
   On montre donc facilement par récurrence que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Il suffit de résoudre $f(x) = x : 1 - x^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-4+\sqrt{20}}{2} = -2+\sqrt{5}$ ou $x = \dfrac{-4-\sqrt{20}}{2} = -2-\sqrt{5}$
   Ainsi l'unique solution dans I est $-2+\sqrt{5}$.
4. On pose $\alpha = \sqrt{5} - 2$. Pour tout $x, y \in [0,1]$, comme f est dérivable sur I et que $\forall t \in I$, $|f'(t)| = \dfrac{x}{2} \in [0, 1/2]$, alors par le IAF : $|f(x) - f(y)| \leqslant 1/2|x-y|$
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n) - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
5. On en déduit par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Ainsi par le th. des gendarmes, $u_n \to \alpha$.

5 Variations et dérivées

Dérivées et sens de variation

Théorème 5.1. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

$f' = 0$ *sur* $I \Leftrightarrow f$ *est constante sur* I

$f' \geq 0$ *sur* $I \Leftrightarrow f$ *est croissante sur* I

$f' \leq 0$ *sur* $I \Leftrightarrow f$ *est décroissante sur* I

Démonstration. On montre le 3ième point par exemple :
$\Rightarrow$) Supposons que $f' \leqslant 0$, soit $x, y \in I$ et $x \leqslant y$.
Par le TAF, comme f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ alors il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y) \leqslant 0$ car $f'(c) \leqslant 0$. Ainsi f est décroissante.

$\Leftarrow$) Supposons que f est décroissante sur I. Soit $x \in I$, et $y \neq x \in I$ alors : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant 0$ (regarder les cas $x < y$ et $y < x$)
Ainsi $\lim_{y\to x} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(x) \leqslant 0$. □

Remarque 5.2. Rappelons que l'on ne dit pas que la fonction inverse, par exemple, est décroissante sur R^* mais qu'elle est décroissante sur R_+^* ET décroissante sur R_-^*. Sinon on peut être amené à écrire des bêtises du style :
$-2 \leq 3 \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{3}$!

Autre exemple : la fonction $f : \left(x \mapsto \dfrac{|x|}{x}\right)$ est définie sur R^*. Elle est égale à -1 sur R_-^* et à 1 sur R_+^*. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Quelle est la dérivée de f sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$?

Pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $f'(x) = 0$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 0$.

Quelle conclusion tentante (mais fausse !) pourrait-on en tirer ?
Il ne faut pas dire que f est constante sur $]-\infty,0[\cup]0;+\infty[$, en effet, ce n'est pas le cas, elle n'est constante que sur les intervalles inclus dans D_f, par exemple sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 5.3. 1. Calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = arctan(x) + arctan(1/x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$.

Conclusion : la fonction f est constante sur tout intervalle inclu dans $\mathbb{R}^*$, ainsi elle est constante sur R_+^*, ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $arctan(x) + arctan(1/x) = arctan(1) + arctan(1) = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$.

De même, elle est constante sur R_-^*, ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $arctan(x) + arctan(1/x) = arctan(-1) + arctan(-1) = -\pi/4 - \pi/4 = -\pi/2$.

2. Étudier la dérivée de $x \mapsto ln(x+\sqrt{x^2+1}) + ln(-x+\sqrt{x^2+1})$

On cherche d'abord l'ensemble de définition : $x^2+1>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, si $x \geqslant 0$, $x+\sqrt{x^2+1}>0$ et $-x+\sqrt{x^2+1}>0$ car $x^2<x^2+1$ et donc $x=|x|<\sqrt{x^2+1}$

Ainsi pour tout $x \leqslant 0$, $f(x)$ est définie.

Si $x<0$, comme $-x=|x|<\sqrt{x^2+1}$ et donc $x+\sqrt{x^2+1}>0$, et $-x+\sqrt{x^2+1}>0$ est trivial.

Ainsi $D_f = \mathbb{R}$

f est dérivable par composée sur son ensemble de définition ($x \mapsto x+\sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ où ln est dérivable, de même pour $-x \mapsto x+\sqrt{x^2+1}$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{-1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{-x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{-x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

Fonctions strictement monotones (admis)

Théorème 5.4. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*
Si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Exemple 5.5. Montrons que la fonction cos est strictement décroissante sur $[0;\pi]$. En déduire qu'il s'agit d'une bijection de $[0;\pi]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
Non corrigé ainsi mais simple, on obtient que $cos'(x) \leqslant 0$ sur $[0;\pi]$ et ne s'annule qu'en $\pi/2$, ainsi cos est strictement décroissante et continue sur $[0;\pi]$, et on obtient par le TBM, le fait que cos est une bijection de $[0;\pi]$ vers $[-1,1]$.

Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 5.6. *Soit $a \in I$ et f une fonction $C^1(I\setminus\{a\})$, et continue en a. Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = l$ alors $f \in C^1(I)$ et $f'(a) = l$.*

Démonstration. Soit $a \in I$ et f une fonction $C^1(I\setminus\{a\})$, et continue en a.
Pour tout $x>a$, on peut appliquer le TAF, et donc il existe $c_x \in]a,x[$ tel que $f'(c_x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, on comme $c_x \underset{x\to a^+}{\to} a$ alors $\lim\limits_{x\to a^+} f'(c_x) = l = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ainsi f est dérivable à droite en a et $f'_d(x) = l$.
On raisonne de même pour la gauche.
Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = l$. De plus, comme $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = l = f'(a)$, ainsi f' est continue en a. □

Exemple 5.7. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 ln(x) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$ est de classe C^1 sur R_+.
En effet, cette fonction est trivalement $C^1(\mathbb{R}_+^*)$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 ln(x) = 0 = f(0)$ par C.C., donc f est continue en 0.
Comme pour tout $x>0$, $f'(x) = 2xln(x) + x \underset{x\to 0^+}{\to} 0$ alors par le th. de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ et $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$.