Chapitre 15 : Les probabilités, conditionnement

1 Exemples

On lance deux dés aux 6 faces équiprobables. Soit A l'évènement "la somme des points obtenus est au moins égale à 10". Alors $P(A) = \frac{1}{6}$. En effet, il y a 6 cas favorables : $(6,4),(4,6),(5,5),(6,5),(5,6),(6,6)$, et 6^2 cas possibles (car $\Omega = [\![1,6]\!]^2$).

Supposons que le premier dé amène un 2 (évènement B), alors sous cette hypothèse, A est devenu irréalisable, on dit donc que la probabilité de A sachant B est nulle, et on note $P_B(A) = 0$.
Or, $A \cap B = \emptyset$, donc on a $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0}{\frac{1}{6}} = 0 = P_B(A)$.

Supposons que le premier dé amène un 6 (évènement C), alors sous cette hypothèse, A sera réalisé si et seulement si le deuxième dé amène un chiffre au moins égal à 4, il y a donc trois cas favorables et 6 cas possibles. On dit alors que la probabilité de A sachant C est égale à $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, et on note $P_C(A) = \frac{1}{2}$.
Or, $\frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2} = P_C(A)$

2 Définitions et proriétés

Définition de la probabilité conditionelle

Définition 2.1. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et soit B un évènement de probabilité **non nulle**. Pour tout évènement A, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, et on note $P_B(A)$ le nombre $\boxed{P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$.

Théorème 2.2. *L'application* $A \in \mathcal{P}(\Omega) \mapsto P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ *définit une probabilité sur* $\mathcal{P}(\Omega)$.

Démonstration. On montre que P_B respecte la définition d'une probabilité :
Vérifions que P_B est à valeurs dans $[0,1]$. Pour tout $A \subset \Omega$, $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \in [0,1]$ car : $P(A\cap B) \leqslant 0$ et $P(B) > 0$, et comme $A \cap B \subset B$, alors $P(A\cap B) \leqslant P(B)$ et donc $P_B(A) \leqslant 1$ $p_B(\Omega) = \frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.
Soit A et C deux événements incompatible, alors $A\cap B$ et $C \cap B$ sont incompatibles car sinon, par l'absurde, il existe $\omega \in A\cap B\cap C\cap B$, et donc $\omega \in A\cap C$ ce qui est absurde.
Ainsi $P_B(A\cup C) = \frac{P((A\cup C)\cap B)}{P(B)} = \frac{P((A\cap B)\cup(C\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} + \frac{P(C\cap B)}{P(B)} = P_B(A) + P_B(C)$ (on a utiliser l'incompatibilité vu ci-dessus).

□

On a en particulier : $\boxed{P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)}$ et $\boxed{P_B(A_1\cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2) - P_B(A_1\cap A_2)}$.

3 Formule des probabilités composées.

Dans la pratique, on a assez souvent $P_B(A)$ qui est donné par l'énoncé et on a besoin de $P(A\cap B)$. La définition d'une probabilité conditionnelle sert alors sous la forme : $\boxed{P(A\cap B) = P_B(A)P(B)}$

Exemple 3.1. Une urne contient 7 boules blanches et 3 noires. On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne. Quelle est la probabilité que les deux boules soient blanches ?
On note B_1 (resp. B_2) les événements la première (resp la seconde) boule tirée est blanche. Alors $P(B_1\cap B_2) = P(B_1)\times P_{B_1}(B_2) = \frac{7}{10}\times\frac{6}{9} = \frac{7}{15}$.

La formule $P(A\cap B)=P_B(A)P(B)$ se généralise de la façon suivante, que l'on appelle formule des probabilités composées :

Formule des probabilités composées

Théorème 3.2. *Soient $A_1,\ldots,A_n$ des évènements d'un espace probabilisé tel que $P(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$. Alors*

$$\boxed{P\big(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}\cap A_n\big)=P(A_1)\times P_{A_1}(A_2)\times P_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\cdots\times P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)}$$

.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence, en remarquant en premier lieu que si $P(A_1\cap\ldots\cap A_n)\neq 0$ alors comme pour tout $j\in[[1,n]]$, $A_1\cap\ldots\cap A_n\subset A_1\cap\ldots\cap A_j$ alors $P(A_1\cap\ldots\cap A_j)\neq 0$.
On pose $P(n)$: si $P(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$ alors $P\big(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}\cap A_n\big)=P(A_1)\times P_{A_1}(A_2)\times P_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\cdots\times P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$
I : Trivial, avec $n=1$, il n'y a rien à faire.
H : supposons que la propriété est vraie au rang n et montrons la au rang $n+1$:
Supposons $P(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}\cap A_n)\neq 0$:
$P\big(A_1\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1}\big)=P\big((A_1\cap\cdots\cap A_n)\cap A_{n+1}\big)=P\big(A_1\cap\cdots\cap A_n\big)\times P_{A_1\cap\cdots\cap A_n}\big(A_{n+1}\big)=P(A_1)\times P_{A_1}(A_2)\times P_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\cdots\times P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$.
Conclusion : $P(1)$ est vraie et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $p(n)\Rightarrow P(n+1)$, ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie. □

Exemple 3.3. Toujours dans la même urne (7 boules blanches et 3 noires), on tire successivement et sans remise trois boules de cette urne. Quelle est la probabilité que les deux premières boules soient blanches et la troisième noire ?
Avec des notations similaires, $P(B_1\cap B_2\cap\bar{B}_3)=P(B_1)\times P_{B_1}(B_2)\times P_{B_1\cap B_2}(\bar{B}_3)=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{6}{9}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{7}{40}$

4 Formule des probabilités totales

Formule des probabilités totales

Théorème 4.1. *Soit $(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ un système complet d'évènements d'un espace probabilisé, tel que $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$, $P(A_i)\neq 0$. Alors, pour tout évènement B, on a* $\boxed{P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P_{A_i}(B)P(A_i)}$.

Démonstration. faite au chapitre précédent pour la première égalité, puis on utilise la formule
$P(B\cap A)=P_A(B)P(A)$ valable pour des événements tels que $P_A(B)$ ait un sens, c'est-à-dire tels que $P(A)\neq 0$. □

Exemple 4.2.

1. Reprenons notre urne contenant 7 boules blanches et 3 noires. On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au second tirage ?
   Avec toujours les mêmes notations, on remarque que $\{B_1,\bar{B}_1\}$ forment un système complet d'événements.
   Ainsi $P(B_2)=P(B_1)P_{B_1}(B_2)+P(\bar{B}_1)P_{\bar{B}_1}(B_2)=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{6}{9}+\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{9}=\dfrac{63}{90}=\dfrac{7}{10}$
2. Une compagnie d'assurances estime que la population peut-être classée en deux catégories : ceux qui ont plus de 2 accidents de voiture par an et les autres. Elle estime que la première catégorie représente 30% de la population. De plus, selon des études statistiques, un individu de la première catégorie a une probabilité de 0.4 d'avoir un accident de voiture dans l'année, et cette probabilité vaut 0.2 pour un individu de la seconde catégorie. Quelle est la probabilité qu'un nouveau client ait un accident dans l'année qui suit ?
   Même fonctionnement, laissé au lecteur en introduisant les événements voulus.
3. On a n urnes $U_1,U_2,\cdots,U_n$. L'urne U_k contient k boules blanches et $n+1-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
   On note aussi U_k l'événement l'urne U_k a été choisi et B la boule tirée est blanche, et on remarque que $\{U_1,\ldots,U_n\}$ forment un sce.
   Ainsi, par la FPT, $P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(U_k)P_{U_k}(B)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\dfrac{k}{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{1}{2}$

5 Formule de Bayes

Si A et B sont deux évènements de probabilité non nulle, alors on a : $P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = P_A(B)P(A)$.

Donc $\boxed{P_B(A) = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}}$.

Cette formule permet de "retourner le conditionnement".

Théorème 5.1. *Soit $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ un système complet d'évènements tel que $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, P(A_i) \neq 0$. Alors pour tout évènement B de probabilité non nulle, on a* $\boxed{\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}, P_B(A_j) = \dfrac{P(A_j)P_{A_j}(B)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}}$.

Démonstration. On remarque que par la formule des probabilités totales, $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)$ Pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$P_B(A_j) = \frac{P(B \cap A_j)}{P(B)} = \frac{P_{A_j}(B) \times P(A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P_{A_j}(B)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}$$

□

Remarque 5.2. Si le système complet d'évènements est $\{A, \overline{A}\}$ avec $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$,
alors $P_B(A) = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})}$.

Exemple 5.3. On a un lot de 100 dés, parmi lesquels 25 dés sont pipés : pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 est de 1/2. On prend un dé au hasard dans ce lot. On lance le dé choisi et on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?
On note P l'événement, le dé choisit est pipé.
On note A_i l'événement, le résultat du lancer de dé est i.

Ainsi, $P_{A_6}(P) = \dfrac{P(P \cap A_6)}{P(A_6)} = \dfrac{P(P) \times P_P(A_6)}{P(P)P_P(A_6) + P(\bar{P})P_{\bar{P}}(A_6)} = \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6}} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

6 Indépendance

6.1 Indépendance de 2 événements.

De façon naturelle, on a envie de dire que deux évènements A et B sont indépendants si le fait que B soit réalisé n'influence pas la réalisation de A, et réciproquement.Attention, cette idée est difficile percevoir en exercice. On pourrait la formaliser ainsi : $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$ si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Le choix de la définition sera le suivant :

Définition 6.1. Deux évènements A et B d'un espace probabilisé sont **indépendants** si $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$.

Proposition 6.2. *Lorsque $P(A) \neq 0$, les évènements A et B sont indépendants si et seulement si* $\boxed{P_A(B) = P(B)}$.

Exemple 6.3.

1. On tire une carte d'un jeu de 52 cartes. Soit $A =$ "la carte tirée est un pique" et $B =$ "la carte tirée est un roi". Les événements A et B sont-ils indépendants ?
   On est dans une situation d'équiprobabilité car chaque carte à la même probabilité d'apparition. $P(A) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$, et $P(B) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$, donc $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{52}$
   $P(A \cap B) = \dfrac{1}{52}$.
   Les événements sont bien indépendants.
   Même question avec A et $C =$ "la carte tirée est un carreau ou un coeur".
   $P(C) = \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$.
   $P(A \cap C) = 0 \neq P(A) \times P(C)$ et donc les événements ne sont pas indépendants.

2. On lance deux fois de suite le même dé. $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ et on prend la probabilité uniforme sur Ω. Prenons A_1 = "on obtient 6 au premier lancer" et A_2 = "on obtient 6 au deuxième lancer". A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?
   Oui car $P(A_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ trivialement.
   Et $P(A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
   En effet $A_1 = \{(6,1),(6,2),...,(6,6)\}$ et $A_2 = \{(1,6),...,(6,6)\}$.

Remarque 6.4. En pratique, on justifiera souvent qu'ils sont indépendants quand les conditions de l'expérience le justifient. Par exemple : lancers successifs d'un dé ou d'une pièce, tirage dans une urne avec remise.

Proposition 6.5. *Soit A et B deux évènements indépendants de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Démonstration. Comme A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
$P(\bar{A} \cap B) = P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A})$. Ainsi $\bar{A}$ et B sont indépendants.
$\bar{B}$ et A sont indépendants de la même manière.
$P(\bar{A} \cap \bar{B})) = P(A \bar{\cup} B) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\bar{A})P(\bar{B})$.
Ainsi $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants. □

6.2 Indépendance mutuelle

Définition 6.6. Soit $A_1, \cdots, A_n$ n évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
- On dit que ces évènements sont **deux à deux indépendants** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.
- On dit que ces évènements sont **mutuellement indépendants** si pour toute partie J incluse dans $[\![1,n]\!]$,

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

.

Exemple 6.7. Les événements A, B et C sont mutuellement indépendants signifie que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$, $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$ et $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$.

Remarque 6.8. ATTENTION ! L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux. Mais la réciproque est fausse :
On se place dans la situation de deux jets d'un dé à 6 faces.
On note A : "le premier lancer donne 6", B : "le second lance donne 6", C : "les deux lancers donne le même résultat".
La situation est équiprobable, chaque couple de résultats ayant la même probabilité.
Alors $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{6}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$ et $P(B \cap C) = \frac{1}{36}$ et $P(A \cap C) = \frac{1}{36}$ (en fait, $A \cap B = B \cap C = A \cap C$).
Ainsi les trois événements sont indépendants deux à deux.
$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq P(A)P(B)P(C)$.
Ainsi les événements sont mutuellement indépendants.

Exemple 6.9. On lance deux dés "équilibrés". Soit A l'évènement "le premier dé amène un numéro pair", B l'évènement "le deuxième dé amène un numéro pair" et C l'évènement "la somme des dés donne un numéro impair". Montrer que les évènements A, B et C sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.
Trivialement.

Remarque 6.10. En pratique, on fera rarement le calcul de probabilités pour voir si des événements sont mutuellement indépendants, mais on dira qu'ils sont indépendants quand les conditions de l'expérience le justifient. Par exemple : lancers successifs d'un dé ou d'une pièce, tirage dans une urne avec remise.

Proposition 6.11. *Soit $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille d'évènements mutuellement indépendants, alors la famille $(A'_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ où A'_i désigne A_i ou $\overline{A_i}$ est également une famille d'évènements mutuellement indépendants.*

Exemple 6.12. Si on sait que les événements A, B, C, D sont indépendants (l'absence de précision signifie "mutuellement indépendants"), alors il en est de même de A, $\overline{B}$, $\overline{C}$, D.