Chapitre 22 : comparaison des suites, o et équivalences

Nous allons voir des outils assez simples et très efficaces pour, entre autres, déterminer des limites.

1 Rappels

Soit q un réel. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} \textit{inexistente} & \text{lorsque } q \leq -1 \\ 0 & \text{lorsque } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{lorsque } q = 1 \\ \textit{inexistente} & \text{lorsque } q > 1 \end{cases}$

Soit α et β deux réels strictement positifs. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$

Soit $a > 1$ et $\alpha > 0$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$

Soit $a > 1$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$

Exercice 1. Déterminer les limites éventuelles en $+\infty$ des suites suivantes : $\dfrac{\ln n}{1,1^n}$ et $0,6^n\sqrt{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{1,1^n} = 0$ car $1.1 > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^n\sqrt{n} = 0$ car $|0.6| < 1$ et $\sqrt{n} = n^{1/2}$.

2 Suite néglibeable par rapport à une autre

Définition 2.1. Soit u et v deux suites réelles. On dit que u est *négligeable* devant v lorsqu'il existe une suite ε de <u>limite nulle</u> telle que, à partir d'un certain rang, on ait : $u_n = \varepsilon_n v_n$.
On note $u_n = o(v_n)$ ou $u = o(v)$. On dit aussi que v est *prépondérante* devant u.

Exemple 2.2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $n^2 = \dfrac{1}{n} \times n^3$ donc $n^2 = o(n^3)$.

<u>Cas particuliers</u> :

1. Que signifie $u_n = o(1)$? On a donc $u_n = \varepsilon_n 1 = \varepsilon_n$ donc $u_n \to 0$.

2. Que signifie $u_n = l + o(1)$? On a donc $u_n = l + \varepsilon_n \to l$

3. Que signifie $u_n = o(0)$? On a donc $u_n = \varepsilon_n \times 0 = 0$.

Version à retenir de la définition $\boxed{u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}$

(cela suppose qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (v_n) sont non nuls, ce qui en pratique est à peu près toujours vrai).

Exemple 2.3.
1. On a $n^2 = o(3^n)$ et $n^4 = o(3^n)$, ce qui incite à conclure que $n^2 = n^4$ mais c'est faux ! Lorsqu'on écrit $n^2 = o(3^n)$, le signe = est un signe $\in$ déguisé et il faut comprendre : la suite (n^2) appartient à l'ensemble des suites négligeables devant la suite (3^n).

2. Pour les couples de suites suivants, dire quelle suite est négligeable devant l'autre :

   — $\sqrt{\ln n}$ et n : $\sqrt{ln(n)} = o(n)$ car $\frac{ln(n)^{1/2}}{n} \to 0$ par CC

   — $n!$ et 100^n : $100^n = o(n!)$ car $\frac{100^n}{n!} \to 0$ par CC

   — 200^n et 100^n : $100^n = o(200^n)$ car $\frac{100^n}{200^n} = \frac{1}{2^n} \to 0$

Proposition 2.4. *On peut voir les comparaisons suivantes : soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$:*
1. *$n^\beta = \circ(exp(\gamma n))$.*
2. *$ln(n)^\alpha = \circ(n^\beta)$.*
3. *$exp(\gamma n) = \circ(n!)$.*
4. *Si $|q| < 1$ alors $q^n = \circ(\frac{1}{n^\alpha})$ et si $|q| > 1$ alors $n^\beta = \circ(q^n)$.*
5. *Si $0 < a < b$ alors $a^n = \circ(b^n)$.*

Démonstration. Pour toutes les preuves suivantes, nous supposerons que les suites manipulées sont non nuls à partir d'un certain rang, pour pouvoir utiliser la version de la définition vu ci-dessus. Néanmoins, nous démontrerons le dernier point avec la définition initiale pour se rendre compte que toutes les démonstrations auraient pu se faire dans ce cas.

1. Il suffit de constater que : $\frac{n^\beta}{exp(\gamma n)} \to 0$, par C.C. car $\beta, \gamma > 0$.
2. Il suffit de constater que : $\frac{ln(n)^\alpha}{n^\beta} \to 0$, par C.C. car $\beta, \alpha > 0$.
3. Il suffit de constater que : $\frac{exp(\gamma n)}{exp(n!} \to 0$, par C.C..
4. Supposons $|q| < 1$, alors $|\frac{q^n}{\frac{1}{n^\alpha}}| = n^\alpha |q|^n = n^\alpha exp(nln(|q|)) \to 0$ par C.C. car $ln(|q|) < 0$.

   Supposons $|q| < 1$, alors $|\frac{n^\beta}{q^n}| = \frac{n^\beta}{exp(nln(|q|))} = n^\beta exp(n(-ln(|q|)) \to 0$ par C.C. car $-ln(|q|) < 0$.
5. Avec la définition initiale, supposons $0 < a < b$ alors $a^n = b^n(\frac{a}{b})^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $(\frac{a}{b})^n \to 0$ car $0 < a < b$.

□

Proposition 2.5. *(attention ces propriétés ne seront pas "vraies" pour les équivalents)*
Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites :
1. *Si $u_n = \circ(v_n)$ et $v_n = \circ(w_n)$ alors $u_n = \circ(w_n)$*
2. *Si $u_n = \circ(w_n)$ et $v_n = \circ(w_n)$ alors $u_n + w_n = \circ(w_n)$*
3. *Si $u_n = \circ(v_n)$ alors $u_n w_n = \circ(v_n w_n)$*

Démonstration. 1. Supposons que $u_n = \circ(v_n)$ et $v_n = \circ(w_n)$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}\frac{v_n}{w_n} = 0$ par hypothèse.

2. Supposons que $u_n = \circ(w_n)$ et $v_n = \circ(w_n)$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n+v_n}{w_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} + \frac{v_n}{w_n} = 0$ par hypothèse.
3. Supposons $u_n = \circ(v_n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n w_n}{v_n w_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ par hypothèse.

□

3 Suites équivalentes

Définition 3.1. Soit u et v deux suites réelles. On dit que u et v sont équivalentes lorsqu'il existe une suite α de limite 1 telle que, à partir d'un certain rang, on ait : $u_n = \alpha_n v_n$.
On note $u \sim v$ ou $u_n \sim v_n$.

Remarque 3.2. 1. Autre écriture utilisant la notion de négligeabilité :
On remarque que $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$ car $u_n = v_n + o(v_n)$ signifie : $u_n = v_n + v_n\varepsilon_n v_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ et donc on a l'équivalence en posant $\alpha_n = 1+\varepsilon_n$.
2. On peut dire indifféremment u est équivalente à v, ou v est équivalente à u. On dit que la relation "être équivalente à" pour deux suites est symétrique.
$\boxed{u \sim v \Leftrightarrow v \sim u \Leftrightarrow u = v + o(v) \Leftrightarrow v = u + o(u)}$
3. $u_n \sim 0$ signifie $u_n = 0$ à partir d'un certain rang ! !
ATTENTION A NE PAS CONFONDRE AVEC $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Soit λ un réel non nul. On a : $\boxed{u_n \sim \lambda \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda}$.

Version à retenir de la définition $\boxed{u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1}$

(cela suppose qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite v_n sont non nuls, ce qui en pratique est à peu près toujours vrai).

Exemple 3.3. $n^2-3n+6 \sim n^2$ car $\frac{n^2-3n+6}{n^2} \to 1$; $\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} + 5 \sim 5$ car $\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} + 5}{5} \to 1$; $2^n - 3n^{10} \sim 2^n$ car $\frac{2^n - 3n^{10}}{2^n} \to 1$ (CC)

Proposition 3.4. *Soit u et v deux suites équivalentes.*

1. *Si l'une converge dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors l'autre aussi, vers la même limite.*
2. *Les suites u et v ont le même signe à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes.
2) Comme $\frac{u_n}{v_n} \to 1$ alors il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \frac{u_n}{v_n}$, ainsi à partir de ce rang n_0, u_n et v_n ont même signe.

1) Supposons sans perte de généralité, que $v_n \to l \in \bar{\mathbb{R}}$.
Comme il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = \alpha_n v_n$ et que $\alpha_n \to 1$ et $v_n \to l$ alors trivialement (u_n) converge et $u_n \to l$. □

Exemple 3.5. On a $(-1)^n n^2 + 2^n - n \sim 2^n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n n^2 + 2^n - n = +\infty$, et la suite $((-1)^n n^2 + 2^n - n)$ est positive à partir d'un certain rang.

Remarque 3.6. Lorsqu'on manipule des équivalents, il faut bien prendre garde que ce n'est pas une égalité, et on ne peut pas utiliser certaines règles tentantes. Par exemple :

1. On a $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$ et $\sqrt{n+2} \sim \sqrt{n}$.
   On pourrait donc vouloir écrire sans trop réfléchir : $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \sim 0$.
   Mais c'est FAUX (la suite $(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$ n'a pas tous ses termes nuls à partir d'un certain rang).

   AUCUNE REGLE NE PERMET SOUSTRAIRE DES EQUIVALENTS, NI D'EN ADDITIONNER.

   Autre cas similaire : $\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$. Cette fois, il est juste d'écrire $\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \sim 2\sqrt{n}$, mais cela doit être justifié en revenant à la définition :
   $\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} + \sqrt{\dfrac{n+2}{n}}\right) \to \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$
   Remarque : on peut trouver un équivalent simple de $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$, en utilisant l'astuce classique de la multiplication par la partie conjuguée :

   En effet, $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \dfrac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$
   Ainsi comme $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}} \to 1$.
2. On a $n^2+n \sim n^2$, mais $\exp(n^2+n) \sim \exp n^2$ est FAUX (Pouvez-vous le justifier ?)
   En effet, $\dfrac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} = e^n \to +\infty$.
   Lorsqu'on a deux suites équivalentes, ON NE COMPOSE PAS PAR N'IMPORTE QUELLE FONCTION, ET NOTAMMENT PAS PAR EXP.

   Par contre, on a bien $\exp(n^2 + \frac{1}{n}) \sim \exp n^2$. La justification n'est pas que $n^2 + \frac{1}{n} \sim n^2$, mais que la limite du rapport $\dfrac{\exp(n^2+\frac{1}{n})}{\exp n^2}$ est 1. En effet : $\dfrac{e^{n^2+\frac{1}{n}}}{e^{n^2}} = e^{1/n} \to e^0 = 1$.

Voyons maintenant des règles que l'on peut utiliser :

3.1 Propriétés

Pour toutes suites u, v, w, u', v' et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a

1. $u \sim u'$ et $v \sim v' \Rightarrow uv \sim u'v'$ et aussi $\dfrac{u}{v} \sim \dfrac{u'}{v'}$ si les suites v et v' ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.
2. $u \sim v$ et $v \sim w \Rightarrow u \sim w$
3. $u \sim v \Rightarrow u^\lambda \sim v^\lambda$ si les suites u et v sont positives à partir d'un certain rang.
4. Si $u_n = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k n^k$ et $v_n = \sum\limits_{k=0}^{p} b_k n^k$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{a_m n^m}{b_p n^p}$

Démonstration. Pour les 1,3 et 4, nous supposerons que les suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, mais nous ferons le second avec la définition initiale pour se convaincre que la preuve était possible ainsi.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n v_n}{u'_n v'_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u'_n}\dfrac{v_n}{v'_n} = 1$ par limite d'un produit, et par hypothèse. De même pour le quotient.

2. Par hypothèse, il existe $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = \alpha_n v_n$ (et $\alpha_n \to 1$), et tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $v_n = \alpha'_n w_n$ (et $\alpha'_n \to 1$).
   Ainsi pour tout $n \geqslant max(n_0, n_1)$, $u_n = \alpha_n \alpha'_n w_n$ et $\alpha_n \alpha'_n \to 1$. Ainsi $u_n \sim w_n$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n^\lambda}{v_n^\lambda} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^\lambda = 1$ par règle sur les limites et par hypothèse.
4. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k n^k$ et $v_n = \sum\limits_{j=0}^{p} b_j n^j$.
   Ainsi $\frac{u_n}{v_n} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} a_k n^k}{\sum\limits_{j=0}^{p} b_j n^j} = \frac{a_m n^m}{b^p n^p} \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{a_k}{a_m} n^{k-m}}{\sum\limits_{k=0}^{p} \frac{b_k}{b_p} n^{k-p}}$
   Ainsi $\frac{\frac{u_n}{v_n}}{\frac{a_m n^m}{b^p n^p}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{a_k}{a_m} n^{k-m}}{\sum\limits_{k=0}^{p} \frac{b_k}{b_p} n^{k-p}} \to 1.$

□

3.2 Exercice

En déterminant un équivalent simple des suites suivantes, trouver leur limite :

$\frac{(8n-5n^2)(n^4+3)}{n^4+n^2+5}$

$8n-5n^2 \sim -5n^2$ et $n^4+3 \sim n^4$ et $n^4+n^2+5 \sim n^4$ et donc $\frac{(8n-5n^2)(n^4+3)}{n^4+n^2+5} \sim \frac{-5n^6}{n^4} = -5n^2 \to -\infty.$

Ainsi $\frac{(8n-5n^2)(n^4+3)}{n^4+n^2+5} \to -\infty$

$\frac{\sqrt{3n^2+5n+1}}{n+\sqrt{n}}$

$n+\sqrt{n} \sim n$ et $\sqrt{3n^2+5n+1} \sim \sqrt{3n^2}$ et donc $\frac{\sqrt{3n^2+5n+1}}{\sqrt{3n^2}} = \sqrt{\frac{3n^2+5n+1}{3n^2}} \to 1$

Ainsi $\frac{\sqrt{3n^2+5n+1}}{n+\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{3n^2}}{n} = \sqrt{3}$

Ainsi $\frac{\sqrt{3n^2+5n+1}}{n+\sqrt{n}} \to \sqrt{3}.$

$\frac{2^n-5^n}{4^n+n^4}.$

$2^n-5^n \sim -5^n$ et $4^n+n^4 \sim 4^n$ ainsi $\frac{2^n-5^n}{4^n+n^4} \sim \frac{-5^n}{4^n} = -(\frac{5}{4})^n \to -\infty$

3.3 Equivalents très utiles à connaitre par coeur

Soit (u_n) une suite de limite nulle, on a :

1. $\sin u_n \sim u_n$
2. $1-\cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2}$
3. $\tan u_n \sim u_n$
4. $\ln(1+u_n) \sim u_n$
5. $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
6. $\exp u_n - 1 \sim u_n$

Démonstration. Nous supposerons encore que les suites manipulées sont non nulles à partir d'un certain rang.
On suppose bien que $u_n \to 0$! ! !
$\dfrac{sin(u_n)}{u_n} \to 1$ par limite usuelle.
De même pour toute les autres sauf la 5.
Pour la 5 : remarquons en premier lieu que si $\alpha = 0$, nous sommes dans le cas rarissime où $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim 0$, en effet, $(1+u_n)^0 - 1 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
De plus, montrons que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$. Il s'agit ici d'un taux d'accroissement, celui de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
Cette fonction est dérivable en 0 et de dérivée, $x \mapsto \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ et donc le nombre dérivée en 0 est α, d'où le résultat.
Ainsi par th. sur les limites, $\dfrac{(1+u_n)^\alpha - 1}{\alpha u_n} \to 1$. □

Remarque 3.7. Attention, cela ne fonctionnent pas en général si u_n ne tend pas vers 0 : par exemple avec $sin(n)$ et n : $\dfrac{sin(n)}{n} \to 0 \neq 1$.

3.4 Exercice

Quelles sont les limites des suites suivantes ?

$n^2 \sin\left(\dfrac{2}{n}\right)$?

$n^2 sin(2/n) \sim n^2\dfrac{2}{n} = n/2 \to +\infty$ donc $n^2 \sin\left(\dfrac{2}{n}\right) \to +\infty$ (car $sin(2/n) \sim 2/n$ car $2/n \to 0$).

$n \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$?

$n \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim n\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$ et donc $\sqrt{n} \to +\infty$ (car $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ car $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$)

$\left(1-\dfrac{4}{n^2}\right)^n$?

$\left(1-\dfrac{4}{n^2}\right)^n = exp(nln(1-\dfrac{4}{n^2}))$
On remarque que $nln(1-\dfrac{4}{n^2}) \sim n\dfrac{-4}{n^2} = -\dfrac{4}{n} \to 0$ et donc $\left(1-\dfrac{4}{n^2}\right)^n \to e^0 = 1$

$\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$?

On a que : $\sqrt{n^2+n+1} \sim n$ car $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{n} = \sqrt{\dfrac{n^2+n+1}{n^2}} \to 1$ et $\sqrt[3]{n^2-n+1} \sim \sqrt[3]{n^2}$ car $\dfrac{\sqrt[3]{n^2-n+1}}{\sqrt[3]{n^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{n^2-n+1}{n^2}} \to 1$
Donc : $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}} \sim \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^2}} = n^{1/3} \to +\infty$.