HEC ECS 1 : Limites et continuité

— Un *intervalle* de $\mathbb{R}$ est l'un des ensembles suivants : $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$ avec a et b réels tels que $a<b$, $[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$, $]-\infty,a]$, $]-\infty,\infty[$
Les extrémités de l'intervalle $]0,1]$ par exemple sont 0 et 1. On voit qu'elles peuvent ne pas appartenir à I.

— Le *domaine de définition* d'une fonction f est le plus grand ensemble de réels x tels que l'on puisse calculer $f(x)$. Ce n'est pas un intervalle en général. On le notera $\mathcal{D}_f$ dans ce chapitre.

1 Définitions des limites

1.1 Limites finies

1.1.1 Lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$

Définition 1.1. 1. Soit f une fonction dont le domaine de définition contienne un intervalle du type $[a,+\infty[$ où a est un réel et soit ℓ un réel. On dit que f admet comme limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists A\in\mathbb{R} \text{ tel que } \forall x\in\mathcal{D}_f, x\geq A\ \Rightarrow |f(x)-\ell|\leq\varepsilon$$

2. Soit f une fonction dont le domaine de définition contienne un intervalle du type $]-\infty,a]$ où a est un réel et soit ℓ un réel. On dit que f admet comme limite ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists A\in\mathbb{R} \text{ tel que } \forall x\in\mathcal{D}_f, x\leq A\ \Rightarrow |f(x)-\ell|\leq\varepsilon$$

Notation 1.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ ou $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$

Illustration graphique :

Proposition 1.3. *Si la limite existe, elle est unique.*

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l = l'$
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in$ et $A' \in$ tel que pour tout $x \in D_f$, $x \leqslant A$, $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$
et pour tout $x \in D_f$, $x \geqslant B$, $|f(x) - l'| \leqslant \varepsilon$
Ainsi pour tout $x \geqslant min(A, B)$,
$|l - l| = |f(x) - l' + l - f(x)| \leqslant |f(x) - l'| + |l - f(x)| = |f(x) - l'| + |f(x) - l| \leqslant 2\varepsilon$
Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, $|l - l'| \leqslant 2\varepsilon$ et donc $|l - l'| = 0$ et donc $l - l' = 0$ et donc $l = l'$. □

Exemple 1.4. Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
Soit $\varepsilon > 0$, $|\frac{1}{x^2} - 0| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow x^2 \geqslant 1/\varepsilon$
Ainsi si $x \geqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ alors $|\frac{1}{x^2} - 0| \leqslant \varepsilon$.
On a donc bien montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ tel que si $x \geqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ alors $|\frac{1}{x^2} - 0| \leqslant \varepsilon$

1.1.2 Lorsque x tend vers x_0

Définition 1.5. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ et soit x_0 un réel de I ou une extrémité de I. Soit ℓ un réel. On dit que f admet comme limite ℓ lorsque x tend vers x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - x_0| \leq \alpha\ \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Exemple 1.6. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 + 1 = 1$
Soit $\varepsilon > 0$, $|x^2 + 1 - 1| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow x^2 \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow -\sqrt{\varepsilon} \leqslant x \leqslant \sqrt{\varepsilon}$
Ainsi si $|x| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ alors $|x^2 + 1 - 1| \leqslant \varepsilon$.
On a bien montré la définition avec $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$.

Montrer que la fonction partie entière n'admet pas de limite en 0.
Supposons cette limite existe : On montre que la définition n'est pas possible avec $\varepsilon = 1/3$:
Ainsi il existe $\alpha > 0$ (que l'on suppose pour des raisons évidentes plus petits que 1) tel que pour tout x tel que $|x| \leqslant \alpha$, $|\lfloor x \rfloor - l| \leqslant 1/3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leqslant \lfloor x \rfloor - l \leqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor - \frac{1}{3} \leqslant l \leqslant \lfloor x \rfloor + \frac{1}{3}$.
Quelque soit la valeur de α, la condition $|x| \leqslant \alpha$ est respecté par des x positifs et des x négatifs strictement. Or si $x \geqslant 0$ alors $\lfloor x \rfloor = 0$ et si $x < 0$ alors $\lfloor x \rfloor = -1$
Ainsi on devrait avoir à la fois $-4/3 \leqslant l \leqslant -2/3$ et $-1/3 \leqslant l \leqslant 1/3$ ce qui est absurde.

Soit f est la fonction constante égale à 1 définie sur $[0, 2[\cup]2, 4]$.
Dans cet exemple, f n'est donc pas définie en $x_0 = 2$.
La fonction f admet-elle une limite lorsque x tend vers $x_0 = 2$? Oui il est facile de montrer qu'il s'agit de 1/
f est la fonction définie sur $I = [0, 4]$ égale à 1 sur $[0, 2[\cup]2, 4]$ et telle que $f(2) = 5$.
Dans cet exemple, f est donc définie en $x_0 = 2$.
La fonction f admet-elle une limite lorsque x tend vers $x_0 = 2$? Non : en effet, supposons qu'elle admette une limite l : alors :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - 2| \leqslant \alpha$, $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.
Avec $\varepsilon = 1$, $\exists \alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - 2| \leqslant \alpha$, $|f(x) - l| \leqslant 1$
Or quelque soit $\alpha > 0$, la condition $|x - 2| \leqslant \alpha$ est respecté par $x = 2$ et un $x \neq 2$ ($2 + \alpha/2$ par exemple) et donc $|1 - l| \leqslant 1$ (c'est à dire $l \in [0, 2]$) et $|5 - l| \leqslant 1$ (c'est à dire $l \in [4; 6]$) ce qui est absurde.

Ces exemples illustrent deux cas de figure qui sont les suivants :

1. *Premier cas* : f est définie en x_0, c'est-à-dire que $f(x_0)$ existe, alors si la limite de f en x_0 existe, compte-tenu de la définition, elle vaut nécessairement $\ell = f(x_0)$.
   On dit dans ce cas que f est **continue** en x_0.

On retient dès maintenant, même si un chapitre ultérieur sera entièrement consacré à la continuité, que :

$$\boxed{f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

2. *Second cas* : f n'est pas définie en x_0, alors si la limite de f en x_0 existe et vaut une valeur réelle finie ℓ, on dit que f se prolonge par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$

1.1.3 Limites à gauche et à droite

Lorsqu'on considère la limite quand x tend vers x_0 sous la contrainte $x < x_0$ (c'est-à-dire x s'approche de x_0 par la gauche), on parle de limite à gauche de f en x_0 et lorsque x s'approche de x_0 sous la contrainte $x > x_0$, on parle de limite à droite en x_0.

On remarque que les inégalités sont strictes donc le point x_0 n'est pas inclus ce qui implique que l'existence de la limite à gauche ou à droite en x_0 ne dépend ni de l'existence, ni de la valeur de $f(x_0)$.

Les deux fonctions citées en exemples 1 et 2 ci-dessus admettent une limite à gauche et une limite à droite en $x_0 = 2$ qui est égale à 1.

Définition 1.7. Soit ℓ un réel et I un intervalle.

1. Soit x_0 un réel de I ou l'extrémité droite de I et soit f une fonction dont le domaine de définition contient $I \setminus \{x_0\}$. On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x \in]x_0 - \alpha, x_0[\Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

2. Soit x_0 un réel de I ou l'extrémité gauche de I et soit f une fonction dont le domaine de définition contient $I \setminus \{x_0\}$. On dit que f admet ℓ pour limite à droite en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x \in]x_0, x_0 + \alpha] \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Notation 1.8. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ >}}{\longrightarrow} \ell$

Exemple 1.9.

— En utilisant les th. de terminale, étudier les limites à gauche et à droite en 1 pour la fonction $f : x \in \mathbb{R}+^* \mapsto \begin{cases} x - x(\ln x)^2 \text{ si } x > 1 \\ \dfrac{e^x - 1}{\tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)} \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

On utilise ici les règles sur les limites, et on trouve que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} = e - 1$.

— Soit $k \in \mathbb{Z}$. À l'aide la définition, étudier les limites à gauche et à droite en k de la fonction partie entière.

$\lim\limits_{x \to k^+} \lfloor x \rfloor = k$ car :

Simple car : soit $\varepsilon > 0$, $|\lfloor x \rfloor - k| = 0 < \varepsilon$, pour tout $x \in [k; k+1[$.

$\lim\limits_{x \to k^-} \lfloor x \rfloor = k - 1$ car :

Simple car : soit $\varepsilon > 0$, $|\lfloor x \rfloor - (k-1)| = 0 < \varepsilon$, pour tout $x \in k - 1; k[$.

Les deux résultats qui suivent sont très utiles en pratique car il arrive assez souvent que pour déterminer une limite en un réel x_0, on soit obligé de distinguer limite à droite et limite à gauche. C'est le cas lorsque l'expression de $f(x)$ change selon que x est plus grand ou plus petit de x_0, comme dans les deux exemples ci-dessus.

Proposition 1.10. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ et soit x_0 un réel de I qui n'est pas une extrémité de I (f est donc définie en x_0).*

$$f \text{ admet une limite en } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ admet une limite à gauche et à droite en } x_0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

On a alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et f est continue en x_0.

Exemple 1.11. (On utilisera les limites vues en terminale)

— Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x < 0 \\ \cos x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$. Cette fonction admet-elle une limite en 0 ?

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{sin(x)}{x} = 1 = f(0)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} cos(x) = 1 = f(0)$
Ainsi f admet une limite en 0.

— Étudier la limite en $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \sin x \text{ si } x < \dfrac{\pi}{2} \\ \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^3 \text{ si } x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to \pi/2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi/2^-} sin(x) = 0 = f(\pi/2)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - \pi/2)^3 = 0 = f(\pi/2)$
Ainsi f admet une limite en $\pi/2$.

Proposition 1.12. *Soit x_0 un réel d'un intervalle I qui n'est pas une extrémité de I et soit f une fonction non définie en x_0 dont le domaine de définition contient $I \setminus \{x_0\}$.*

$$f \text{ admet une limite en } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ admet une limite à gauche et à droite en } x_0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) \end{cases}$$

On a alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ où $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x)$ (et f se prolonge par continuité en x_0).

Exemple 1.13. — Étudier la limite en 1 de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 1 \\ \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \text{ si } x > 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 = \lim\limits_{x \to 1^+} sin(\dfrac{\pi x}{2}) = 1$ donc f admet une limite en 1.

— Étudier la limite en 0 de la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1}$

On remarque que si $x > 0$: $x\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1} = \sqrt{x^2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1} = \sqrt{1 + x^2} \underset{x \to 0^+}{\to} 1$

Et si $x > 0$: $x\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1} = -\sqrt{x^2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1} = -\sqrt{1 + x^2} \underset{x \to 0^+}{\to} -1$

Ainsi f n'a pas de limite en 0.

1.2 Limites infinies

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ et soit x_0 un réel de I ou une extrémité de I.

Définition 1.14. 1. On dit que f admet comme limite $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$$

2. On dit que f admet comme limite $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq A$$

Dans les deux cas précédents, on dit que la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.

Exemple 1.15. Déterminer $\lim_{x\to 0} \ln(|x|)$ et interpréter graphiquement.
Soit $A \in$, $ln(|x|) \leqslant A \Leftrightarrow |x| \leqslant e^A$. Ainsi si $|x| \leqslant e^A$ alors $f(x) \geqslant A$.
Et donc $\lim_{x\to 0} \ln(|x|) = -\infty$
Ainsi f admet une asymptote verticale : $x = 0$.

Définition 1.16. Soit f une fonction dont le domaine de définition contienne un intervalle du type $[a, +\infty[$ où a est un réel. On dit que f admet comme limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}_f, x \geq B \ \Rightarrow f(x) \geq A$$

Il y a trois définitions analogues pour traduire $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et enfin $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple 1.17. Soit f définie au voisinage de $-\infty$ (autrement dit son domaine de définition contient un intervalle du type $]-\infty, a]$). Ecrire la définition de $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Soit $A \in$, il existe $B \in$, si $x \leqslant B$ alors $f(x) \geqslant A$.

2 Propriétés des limites

2.1 Opérations sur les limites

2.1.1 Opérations algébriques

Rappelons les tableaux suivants où x_0 désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$ et FI l'abréviation de "forme indéterminée".

Limite d'une somme :

$\lim_{x_0} f$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ	ℓ
$\lim_{x_0} g$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ'
$\lim_{x_0}(f+g)$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$\ell+\ell'$

Limite d'un produit :

$\lim_{x_0} f$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0	ℓ
$\lim_{x_0} g$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	ℓ'
$\lim_{x_0}(fg)$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	$\ell\ell'$

La règle des signes s'applique pour trancher entre $+\infty$ et $-\infty$.

Limite de l'inverse d'une fonction :

$\lim_{x_0} f$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0^+	0^-
$\lim_{x_0} \frac{1}{f}$	0	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un quotient : Les règles se déduisent des précédentes puisque $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$

Attention, cela fait apparaitre deux autres FI : $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (qui en réalité correspondent à $0 \times \pm\infty$ du tableau sur la limite d'un produit).

En conclusion, il y a quatre FI :

$$\boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0\times\pm\infty,\ (+\infty)+(-\infty)}$$

Exemple 2.1. Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3x^3 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3(1/x+1) = -\infty.$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-e^{4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{4x}(1-e^{-3x}) = +\infty.$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)-\ln(4x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ln(\frac{x}{4x}) = ln(1/4) = -ln(4)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+4}{e^{2x}+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+4e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 0$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = 0$ par CC
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-2x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^4}}-2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}-2) = -\infty$

2.1.2 Composition des limites

Théorème 2.2. *Soit a, b et ℓ trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire qu'ils peuvent être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions définies sur des intervalles tels que les limites ci-dessous aient un sens.

$$\boxed{\textit{Si } \lim_{x\to a} f(x) = b \ \textit{ et } \lim_{y\to b} g(y) = \ell, \ \textit{ alors } \lim_{x\to a} g(f(x)) = \ell}$$

Ce résultat s'adapte au cas où les limites en jeu sont des limites lorsque x tend vers a^+ ou vers a^-, et y vers b^+ ou b^-.

Exemple 2.3. Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x^2+3x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+3x = 0^+$ et $\lim\limits_{y\to 0} \ln(y) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{y\to 0} cos(y) = 1$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor\frac{1}{x}\rfloor = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \lfloor\frac{1}{x}\rfloor = -1$ car :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$, et $\lim\limits_{y\to 0^+} \lfloor y\rfloor = 0$ et $\lim\limits_{y\to 0^-} \lfloor y\rfloor = -1$

Remarque 2.4. Attention aux fonctions du type $u(x)^{v(x)}$

Vous remarquerez qu'il n'y a aucune règle opératoire sur les limites lorsqu'on a une puissance non constante. Par exemple, prenons la fonction

$$f : x \mapsto \left(x^2\right)^{\frac{1}{1+\ln x}}$$

On vous demande la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

On est tenté de regarder séparément les limites de x^2 et de $\frac{1}{1+\ln x}$. Le problème est que l'on ne saura qu'en faire étant donné qu'aucune règle opératoire n'indique quoi que ce soit sur le sujet. Donc ce n'est pas le bon réflexe.

Le bon réflexe est d'écrire $f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$. Pour ce type de fonction, cela permet de déterminer leur domaine de définition, de les dériver, de trouver une limite...

Revenons à notre exemple : voyons d'abord que la limite demandée a bien un sens en déterminant $\mathcal{D}_f$ puis déterminons cette limite.

2.2 Limites et inégalités

2.2.1 Le théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement.

Théorème 2.5. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et x_0 un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Soit I un intervalle contenant x_0 ou d'extrémité x_0.*
Soit f, g, h trois fonctions définies sur I ou $I \setminus \{x_0\}$. On a :

$$\boxed{\begin{cases} \forall x \in I \text{ (ou } I \setminus \{x_0\} \text{)}, \ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \\ h(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que :
$\forall x \in I$, $|x - x_0| \leqslant \alpha$, $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$ càd $-\varepsilon + l \leqslant f(x) \leqslant l + \varepsilon$
$\forall x \in I$, $|x - x_0| \leqslant \beta$, $|h(x) - l| \leqslant \varepsilon$ càd $-\varepsilon + l \leqslant h(x) \leqslant l + \varepsilon$
Ainsi $\forall x \in I$, $|x - x_0| \leqslant min(\alpha, \beta)$, $-\varepsilon + l \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant l + \varepsilon$ et donc $h(x) - l| \leqslant \varepsilon$

□

Exemple 2.6. Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to 0} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

   Comme $\dfrac{1}{x} - 1 < \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leqslant \dfrac{1}{x}$
   Ainsi, si $x > 0$, $1 - x < x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leqslant 1$ alors $\lim\limits_{x \to 0^+} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$.
   Ainsi, si $x < 0$, $1 < x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leqslant 1 - x$ alors $\lim\limits_{x \to 0^-} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$.
   Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos^3(x)}{x}$
   Pour tout $x > 0$, $-1 \leqslant cos(x) \leqslant 1$ et par croissance de la fonction cube, $-1 \leqslant cos^3(x) \leqslant 1$, et donc :

   $$\frac{-1}{x} \leqslant \frac{cos^3(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

   Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos^3(x)}{x} = 0$.

Proposition 2.7. *(conséquence directe du théorème d'encadrement, avec des valeurs absolues) :*

Soit x_0 un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit I un intervalle contenant x_0 ou d'extrémité x_0.
Soit f, g deux fonctions définies sur I ou $I \setminus \{x_0\}$. On a :

$$\boxed{\begin{cases} \forall x \in I \text{ (ou } I \setminus \{x_0\} \text{)}, \ |f(x)| \leq g(x) \\ g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0}$$

Démonstration. Très simple, $-g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et comme $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et $-g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ alors par le th. précédent, $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

□

Exemple 2.8. Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(x)}{x^2+3}$.
   Comme $|cos(x)| \leqslant 1$ alors $|\frac{xcos(x)}{x^2+3}| = |cos(x)||\frac{x}{x^2+3}| \leqslant \frac{x}{x^2+3}$ et que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+3} = 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(x)}{x^2+3} = 0$
2. $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$:
   Comme $|sin(1/x)| \leqslant 1$ alors $|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leqslant |x|$ et que $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ alors $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

2.2.2 Le théorème de comparaison.

Théorème 2.9. *Soit x_0 un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit I un intervalle d'extrémité x_0.*
Soit f, g deux fonctions définies sur $I\setminus\{x_0\}$ telles que $\forall x \in I\setminus\{x_0\}$, $f(x) \leq g(x)$. Dans ce cas :
$f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty \;\Rightarrow\; g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$, *et*
$g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\infty \;\Rightarrow\; f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\infty$

Exemple 2.10. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3+\sin x}$:
Comme $3+sin(x) \leqslant 4$, alors $\frac{1}{3+sin(x)} \geqslant \frac{1}{4}$ et enfin, si $x > 0$ alors $\frac{x}{3+sin(x)} \geqslant \frac{x}{4}$ et comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3+\sin x} = +\infty$.

2.2.3 Passage à la limite dans une inégalité.

Ce théorème est à distinguer des deux précédents. Il ne sert pas à déterminer une limite, et avant cela, il ne sert pas à montrer l'*existence* de cette limite. Rappelons qu'il n'est pas acquis qu'une fonction ait une limite en un point x_0. Pensez à sin en $+\infty$ ou aux fonctions données au tout début du chapitre pour illustrer la définition d'une limite finie en x_0.

Ce théorème sert à positionner une limite (dire qu'elle est négative, ou comprise entre 0 et 1 par exemple) APRES avoir déterminé son existence.

Théorème 2.11. *Soit x_0 un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit I un intervalle contenant x_0 ou d'extrémité x_0.*
Soit f, g deux fonctions définies sur I ou $I\setminus\{x_0\}$ possédant une limite finie en x_0, notées ℓ pour f et ℓ' pour g. On a les implications suivantes :
$\forall x \in I$ (*ou* $I\setminus\{x_0\}$), $f(x) \leq g(x) \;\Rightarrow\; \ell \leq \ell'$
$\forall x \in I$ (*ou* $I\setminus\{x_0\}$), $f(x) < g(x) \;\Rightarrow\; \ell \leq \ell'$

Remarque 2.12. Bien noter que des inégalités strictes deviennent larges par "passage à la limite". Illustrons rapidement ceci : on a $\forall x > 0, \frac{1}{x} > 0$. Les limites existant à gauche et à droite lorsque x tend vers $+\infty$ et étant finies, on peut passer à la limite.
Ca donne $0 \geq 0$, ce qui n'apporte certes pas grand'chose, mais qui est mieux que $0 > 0$!
Bien noter aussi qu'un passage à la limite ne peut avoir lieu que si on sait déjà que les limites existent et sont finies.

2.3 Théorème de la limite monotone

Il existe un analogue au théorème valable pour les suites numériques : toute suite de réels croissante et majorée converge (converge, c'est-à-dire admet une limite finie). Le voici à propos de fonctions.

La notation $\overline{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des réels auquel on ajoute $-\infty$ et $+\infty$. Quand on écrit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, cela signifie simplement que x_0 peut être un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème 2.13. *(de la limite monotone) :*

1. *Si f est* ***croissante*** *sur $]a,b[$ avec a et b éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, alors*
   - *$\forall x_0 \in]a,b[$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$ et*
     $\sup\limits_{]a,x_0[} f = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\limits_{]x_0,b[} f$.
   - *si f est majorée sur $]a,b[$, alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut $\sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$, sinon $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.*
   - *si f est minorée sur $]a,b[$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut $\inf\limits_{x \in]a,b[} f(x)$, sinon $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.*
2. *Si f est* ***décroissante*** *sur $]a,b[$ avec a et b éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, alors*
   - *$\forall x_0 \in]a,b[$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$ et*
     $\sup\limits_{]x_0,b[} f = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \inf\limits_{]a,x_0[} f$.
   - *si f est minorée sur $]a,b[$, alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut $\inf\limits_{x \in]a,b[} f(x)$, sinon $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$.*
   - *si f est majorée sur $]a,b[$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut $\sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$, sinon $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.*

Remarque 2.14. En résumé :

Si f est une fonction monotone sur un intervalle $I =]a,b[\subset \mathbb{R}$, alors
- f admet une limite réelle (donc finie) à droite et à gauche en tout point x_0 appartenant à I
- f admet des limites aux bornes qui sont réelles (s'il y a majoration/minoration) ou infinies (sinon).

Illustration graphique :

Le théorème de limite monotone s'emploie couramment à propos de suites de réels. Dans le cas des fonctions, en ECS, le théorème de limite monotone a un intérêt théorique mais son utilisation directe dans les problèmes de concours est assez rare.

3 limites à connaitre

Toutes les limites de ce paragraphe correspondent à des formes indéterminées (FI) mais le cours donne le résultat, leur utilisation est très courante.

3.1 Croissances comparées

3.1.1 Rappel de terminale

: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$

3.1.2 Manipulations à savoir faire

:

— Déduire de la première limite la valeur de $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x)$ On pose $X = -x$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} -X\exp(-X)$
$\lim\limits_{X\to+\infty} -\frac{X}{e^X} = 0$ par CC

— Déduire de la seconde limite la valeur de $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$:

On pose $X = 1/x$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} xln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{-ln(x)}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} (\frac{-x}{ln(x)})^{-1} = 0$ par CC

Les résultats qui sont au programme ECS1 sont :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0 \\ \forall(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}+^*)^2,\ \lim\limits_{x\to 0^+} |\ln(x)|^\alpha x^\beta = 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0}$$

Voici quelques exemples d'utilisation :

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{\ln x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(\frac{ln(x)^{1/2}}{x^2}\right) = +\infty$

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-\exp(2x)}{\exp(x)+4\ln(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x \frac{2\frac{x^2}{e^x}-1}{1+4\frac{ln(x)}{e^x}}$ et comme :

   $\frac{ln(x)}{e^x} = \frac{ln(x)}{x}\frac{x}{e^x} \to 0$ par CC et donc :

   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \frac{2\frac{x^2}{e^x}-1}{1+4\frac{ln(x)}{e^x}} = -\infty$

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} x\exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\exp(X) = 0$ par CC

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x(1+1/x))}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)+ln(1+1/x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(1+1/x)}{x} =$
   0 par CC

5. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^2-x)\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 ln(x) - x\ln x = 0$

Remarque 3.1. Un moyen *mnémotechnique* de retenir ces résultats est de se souvenir qu'en cas d'indétermination, les fonctions exp l'emportent sur les fonctions puissances qui l'emportent sur les fonctions ln ou encore si on préfère $\exp x >> x^\alpha >> \ln x$.

Mais attention, il est hors de question de justifier une limite de cette façon sur une copie On doit écrire $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\exp(x)}=0$ par croissances comparées. Attention à ne pas utiliser les croissances comparées hors de leur contexte.

Remarque 3.2. Soit à déterminer $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$. Que pensez vous de : En haut on a un ln, en bas on a x, on est en $+\infty$ donc la limite est 0 par domination des fonctions ln sur les fonctions puissances ?
C'est faux : on n'utilise pas les formules vues dans le cours.
Une solution possible :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(e^x(1+e^{-x}))}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+ln(1+e^{-x})}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{ln(1+e^{-x})}{x}=1$$

3.2 Limites usuelles

$$\boxed{\begin{array}{lll} \frac{\sin(x)}{x}\xrightarrow[x\to0]{}1 & \frac{\tan(x)}{x}\xrightarrow[x\to0]{}1 & \frac{1-\cos(x)}{x^2}\xrightarrow[x\to0]{}\frac{1}{2} \\ \frac{\ln(1+x)}{x}\xrightarrow[x\to0]{}1 & \frac{e^x-1}{x}\xrightarrow[x\to0]{}1 & \end{array}}$$

Remarque 3.3. — Toutes ces limites correspondent à des FI du type $\frac{0}{0}$.

— La valeur de $\lim_{x\to0}\frac{\tan(x)}{x}$ se déduit simplement de celle de $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}$:
$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{sin(x))}{x}\frac{1}{cos(x)}=1$$

- Les quotients $\frac{\sin(x)}{x}$, $\frac{\tan(x)}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\frac{e^x-1}{x}$ s'interprètent tous comme des taux d'accroissement :
$$\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$$
$$\frac{\tan(x)}{x}=\frac{\tan(x)-\tan(0)}{x-0}$$
$$\frac{\exp(x)-1}{x}=\frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0}$$
$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x-0}$$

Cela permet de retrouver la valeur de ces limites. Par exemple, pour la première, comme sin est dérivable en 0, on a $\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to0]{}\sin'(0)=\cos(0)=1$.

Exemple 3.4. Exemples (utilisation des limites usuelles) : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to0}\frac{\tan(x)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\tan(x)}{x}\sqrt{x}=0$ car $\lim_{x\to0}\frac{\tan(x)}{x}=1$
2. $\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos(x)}\frac{1}{x}$ et donc :
   $\lim_{x\to0^+}\frac{x}{1-\cos(x)}=+\infty$ et $\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{1-\cos(x)}=-\infty$. (car $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to0}(\frac{1-\cos(x)}{x^2})^{-1}=2$
3. $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}x=0$ car $\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1$
4. $\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=\lim_{X\to1}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$ (avec $X=x-1$)

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{X\to 0} \frac{\sin(X)}{X/2} = \lim_{X\to 0} 2\frac{\sin(X)}{X} = 2$ avec $X = 2x$

4 Les asymptotes obliques

Vous connaissez déjà les notions d'asymptotes verticales et horizontales, vu en terminale. Ici nous allons de plus nour attarder sur les fonctions dont le comportement en $+\infty$ ou $-\infty$ est semblable à celui d'une fonction affine.

Définition 4.1. Soit f une fonction définie sur $[a;+\infty[$. alors la fonction f admet une asymptote oblique de la forme : $y = ax+b$ en $+\infty$ si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b) = 0$.

Exemple 4.2. Trouver l'asymptote oblique en $+\infty$ de f définie par $f(x) = e^{-4x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 4x - 1$.

Il s'agit de $y = 4x-1$ car $f(x)-(4x-1) = e^{-4x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

Remarque 4.3. Graphiquement,

Remarque 4.4. Si on trouve $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax = b$ alors $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe de f. En effet si l'asymptote existe alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et si $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax = b$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ax+b$

Exemple 4.5. Trouver l'asymptote oblique en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \frac{4x^2+2x-3}{7x+3} + e^{-x}$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{4x^2+2x-3}{7x^2+3x} + e^{-x}/x = \frac{4+2/x-3/x^2}{7+3/x} + \frac{e^x}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{4}{7}$.

De plus, $f(x) - \frac{4}{7}x = \frac{7(4x^2+2x-3)}{7(7x+3)} + e^{-x} - \frac{4x(7x+3)}{7(7x+3)} = \frac{2x-21}{49x+21} + e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{2}{49}$

Ainsi $y = \frac{4}{7}x + \frac{2}{49}$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.

De plus, tous ces résultats ont leur analogue en $-\infty$.

5 Prolongement par continuité

Lorsqu'on a une fonction comme $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, qui n'est pas définie en $x_0 = 0$ mais qui admet une limite finie en x_0, on a envie de définir une nouvelle fonction g sur $\mathbb{R}$ qui "prolonge" f en posant $g(0) = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$.

Illustration graphique :

Proposition 5.1. *Soit I un intervalle et x_0 un réel qui appartient à I ou qui est une extrémité de I.*

Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ (donc f n'est pas définie en x_0).

Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et est finie, égale à ℓ, alors on peut prolonger f par continuité. La fonction g, coincidant avec f sur $I \setminus \{x_0\}$, et telle que $g(x_0) = \ell$, est continue en x_0.

La fonction g s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Remarque 5.2. On peut observer cela graphiquement :

Exemple 5.3. Soit la fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$. Quel est son domaine de définition ? Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et définir la fonction g réalisant ce prolongement.