Chapitre 0 : Rappels de base.
Manipulations algébriques, équations, quantificateurs, suites et polynômes

7 juillet 2021

1 Rappels de bases :

1.1 Quantificateurs

Définition 1.1. On introduit les 3 quantificateurs suivants :

1. "$\forall$" signifie "pour tout".
2. "$\exists$" signifie "il existe".
3. "$\exists!$" signifie "il existe un unique".

Exemple 1.2.
1. On peut traduite la phrase : " pour tout entier n, $n(n+1)$ est paire " par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n(n+1) \text{ est paire}$$

On peut même aller plus loin :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N}, \text{ tel que } n(n+1) = 2k$$

2. De même pour : "Soient $a \neq 0$ et b quelconque, alors $ax+b=0$ a une seule solution " par :

$$\forall a \neq 0, \forall b \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } ax+b=0$$

3. Enfin : " Entre 2 réels distincts, il y a un rationnel" par : "$\forall x, y$ tels que $x<y$, $\exists z \in \mathbb{Q}$, tel que $x \leqslant z \leqslant y$ "

Remarque 1.3. Attention, l'ordre des quantificateurs est important (uniquement) quand ils sont de natures différentes : par exemple :

1. Les énoncés "$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $x+2y \geqslant 0$" et "$\forall y \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x+2y \geqslant 0$" sont équivalents (et vrais)
2. Les énoncés "$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}_+$, $x+2y \geqslant 0$" et "$\exists y \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+2y \geqslant 0$" ne sont pas équivalents : le premier est vrai mais pas le second.

1.2 Puissances entières

Définition 1.4. Soit x un réel et n un entier naturel, on définit par récurrence la puissance n-ème de x par :

$$x^0 = 1 \text{ et}, \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} = x.x^n$$

Remarque 1.5. $0^0 = 1$ et $0^n = 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Proposition 1.6. *$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a*

$\boxed{x^n.x^p = x^{n+p}}$ $\boxed{(x^n)^p = x^{np}}$ $\boxed{(xy)^n = x^n y^n}$ $\boxed{\dfrac{x^n}{x^p} = x^{n-p}}$.

Démonstration. Faire les démonstration avec les ... . □

Remarque 1.7. Attention : $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ en général.

Démonstration. Donner un contre exemple : $(1+2)^3$. □

1.3 Équations produits et quotients :

Proposition 1.8. *Soit $A,B \in \mathbb{R}$ alors : $A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$. De plus, $\frac{A}{B} = 0$ si et seulement si $A = 0$ et $B \neq 0$.*

Remarque 1.9. Attention si ~~$A+B=0$ alors $A=0$~~ ou $B=0$

1.4 Carrés, racines carrés, valeurs absolues

Proposition 1.10.

$$x^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a} & \text{si } a > 0 \\ x = 0 & \text{si } a = 0 \\ \text{impossible} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Démonstration. Si $a \leqslant 0$ alors c'est trivial (faire les cas avec les étudiants).
$x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{a}^2 = 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$. □

Définition 1.11. Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue de x, notée $|x|$, par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 1.12. *$\forall a,b \in \mathbb{R}$, $|a \times b| = |a| \times |b|$ et $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ (si $b \neq 0$).*

Démonstration. Faire la disjonction de cas pour le premier, c'est la même chose pour la deuxième. □

Proposition 1.13.

$$|x| = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \text{ ou } x = -a & \text{si } a > 0 \\ x = 0 & \text{si } a = 0 \\ \text{impossible} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Définition 1.14. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe deux solutions opposées à l'équation $X^2 = x$. Le réel noté $\sqrt{x}$ est la solution **positive** de cette équation. On a par exemple : $\sqrt{0} = 0$ puisque l'équation $X^2 = 0$ a comme unique solution positive 0.

Remarque 1.15. Pour trouver $\sqrt{A}$, on cherche l'unique réel positif B tel que $B^2 = A$.

Proposition 1.16.
1. *$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x}^2 = x$*
2. *$x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.*

Remarque 1.17. Attention, si $a = b$ alors $a^2 = b^2$ mais ~~si $a^2 = b^2$ alors~~ $a = b$ (sauf si $a,b \geqslant 0$)

1.5 Puissances fractionnaires

Définition 1.18. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, la notation $x^{\frac{1}{p}}$ désigne l'unique solution réelle positive de l'équation d'inconnue X : $X^p = x$. On note aussi $x^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{x}$. En particulier $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Si p est impair, on définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^{\frac{1}{p}}$ comme étant l'unique solution réelle de l'équation d'inconnue X : $X^p = x$.

Exemple 1.19. $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ car $\sqrt{3} \geqslant 0$ et $\sqrt{3}^3 = \sqrt{3}^2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.
$(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$ car $(-2)^3 = -8$ et 3 est impair.

Définition 1.20. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ (avec $p \neq 0$) et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $x^{\frac{n}{p}} = (x^{\frac{1}{p}})^n$.

Proposition 1.21. *Les règles de calculs vues avec les exposants entiers restent valables avec les puissances fractionnaires. Par exemple $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = (3 \times 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (3^{1+1/2})^{1/3} = (3^{3/2})^{1/3} = 3^{3/2\times 1/3} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$*

1.6 Trinômes du second degré

Proposition 1.22. *On considère l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On rappelle que :*

— *On note $\Delta = b^2-4ac$*

— *Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet 2 solutions $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ et se factorise sous la forme $ax^2+bx+c = a(x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})(x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})$.*

— *Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet aucune solution réelle et ax^2+bx+c ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.*

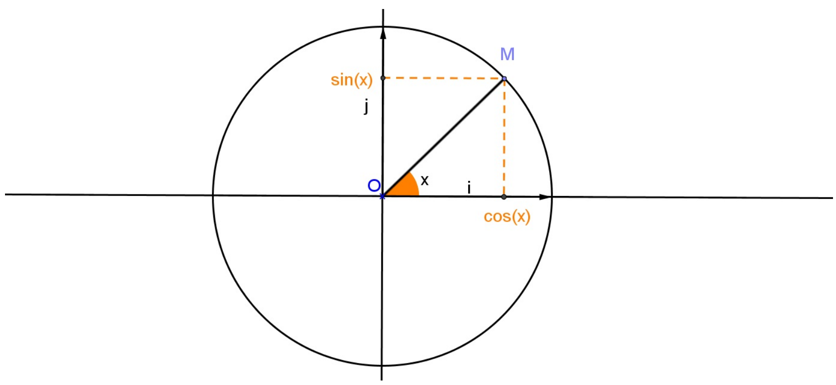
— *Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une unique solution réelle $\dfrac{-b}{2a}$ et se factorise par $ax^2+bx+c = a(x-\dfrac{-b}{2a})^2$*

Démonstration. $ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2})+c-\frac{b^2}{4a} = a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$
Si on pose $\Delta = b^2-4ac$ alors $(E) \Leftrightarrow ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$
Ainsi si on pose $X = x+\frac{b}{2a}$ et $A = \frac{\Delta}{4a^2}$ alors :
$(E) \Leftrightarrow X^2 = A$

Ainsi si $\Delta < 0$ alors $A < 0$ et donc (E) n'a de solution, si $\Delta = 0$ alors $A = 0$ et donc $(E) \Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$.
Enfin, si $\Delta > 0$, $X = -\sqrt{A}$ ou $X = \sqrt{A}$ c'est à dire $x = -\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = -\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ □

1.7 Formules trigonométriques

Remarque 1.23. On rappelle que $cos(x)$ est l'abscisse du point M, d'angle x en radian sur le cercle de centre 0 et de rayon 1. $sin(x)$ est l'ordonnée de ce même point.



1. Valeurs remarquables.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

2. La formule.

   Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\boxed{1 = \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}$

3. Formules à visualiser sur le cercle trigonométrique.

$\sin(-\theta) = -sin(\theta)$ $\quad$ $\cos(-\theta) = cos(\theta)$

$\sin(\pi+\theta) = -sin(\theta)$ $\quad$ $\cos(\pi+\theta) = -cos(\theta)$

$\sin(\pi-\theta) = sin(\theta)$ $\quad$ $\cos(\pi-\theta) = -cos(\theta)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = sin(\theta) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -sin(\theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = cos(\theta) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = cos(\theta)$$

Exercices :

1. Donner la valeur de : $\cos(\frac{3\pi}{4})$; $\cos(\frac{7\pi}{6})$; $\sin(\frac{3\pi}{2})$; $\sin(\frac{14\pi}{3})$
2. Soit k un entier relatif. Donner les valeurs en fonction de k de : $\sin(k\pi)$; $\cos(k\pi)$.

Proposition 1.24. *Pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, on a les formules suivantes :*
$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$
$cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$
$sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$
$sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)$

Démonstration. (En admettant la première) Soit $a,b \in \mathbb{R}$, on admet $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$ (prouvable par des considérations géométriques)
On l'applique en $a = c$ et $b = -d$, $cos(c-d) = cos(c)cos(-d) - sin(c)sin(-d) = cos(c)cos(d) + sin(c)sin(d)$.
De même, en $a = \pi/2 - c$ et $b = -d$, $sin(c+d) = cos(\pi/2 - (c+d)) = cos(\pi/2 - c - d) = cos(\pi/2 - c)cos(d) + sin(\pi/2 - c)sin(d) = sin(c)cos(d) + cos(c)sin(d)$
On applique enfin la dernière formule démontrée en $c = a$ et $d = -b$, $sin(a-b) = sin(a)cos(-b) + sin(-b)cos(a) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)$. □

Exemple 1.25. Exprimer $cos(a)cos(b)$ en fonction de $cos(a+b)$ et $cos(a-b)$.

1.8 Fonctions logarithme népérien

Définition 1.26. Nous admettrons qu'il existe une unique application dérivable $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$. Cette application est appelée **logarithme népérien**. Le nombre e vérifie $\ln(e) = 1$ avec $e \approx 2,718$.

Proposition 1.27. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ *et* $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$*, et donc* $ln(\frac{1}{a}) = -ln(a)$.

Exemple 1.28. Soit $x > 0$. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $ln(x)$: $ln(x^4)$, $ln(\frac{e}{x})$, $ln(\frac{\sqrt{x}}{e})$, $ln(ex)$,$ln(\sqrt{\frac{x}{e}})$.

Proposition 1.29. *Pour tout $x,y \in \mathbb{R}_+^*$, $ln(x) = ln(y) \Leftrightarrow x = y$*

1.9 Fonction exponentielle

Définition 1.30. L'application $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp x) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln x) = x$. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = exp(x) = f(x)$.

Proposition 1.31. *$exp(0) = 1$ et $exp(1) = e$ et $exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$*, et* $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$*, et donc* $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.

Exemple 1.32. Simplifier $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ et $\frac{1}{1+e} - \frac{e^{-1}}{1+e^{-1}}$.

Proposition 1.33. *Pour tout $x,y \in \mathbb{R}$, $exp(x) = exp(y) \Leftrightarrow x = y$*

Extension des puissances fractionnaires aux puissances réelles :

Définition 1.34. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{R}$, on pose $x^r = \exp r \ln(x)$. On montre que cette formule généralise les puissances fractionnaires. On a l'égalité $e^x = \exp x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.35. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $r \in \mathbb{R}$, $\ln(x^r) = r \ln x$

Remarque 1.36. Les règles de calculs vues avec les exposants entiers restent valables avec les puissances réelles.

2 Suppléments sur les polynômes

Définition 2.1. On appelle fonction polynômiale toutes fonctions de la forme

$$P : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \end{array} \right.$$

On appelle racine de P tout réel a tel que $P(a) = 0$.

Proposition 2.2. *a est une racine de P si et seulement si $P(x) = (x-a)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré $deg(P) - 1$.*

Procédé de factorisation des polyômes de degré 3 ou plus

1. On trouve une racine (souvent on teste $0;1;2;-1;-2$).
2. On effectue la division euclidienne du polynôme par $x - a$.

Exemple 2.3. On considère P définie par $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.
On remarque que $P(1) = 0$ donc $P(x)$ est factorisable par $(x-1)$ et, (calcul à poser) : $P(x) = (x-1)(x^2+2x+1) = (x-1)(x+1)(x+1)$

3 Rappels sur les suites

Définition 3.1. Une suite $(u_n)_n$ est **arithmétique** si on passe d'un terme au suivant en ajoutant un même nombre r appelé **raison** de la suite.
Ainsi la suite est définie par : $\left\{ \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & u_n + r \\ u_0 & & donnee \end{array} \right.$ (*définition par récurrence*)

Remarque 3.2. Pour montrer que (u_n) est arithmétique, on montre que $u_{n+1} - u_n = r$ (r doit être constant (indépendant de n))

Proposition 3.3. *Si (u_n) est arithmétique de raison r, alors $u_n = u_0 + rn$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
La réciproque est vraie : si $u_n = an + b$ alors (u_n) est arithmétique de raison a et tel que $u_0 = b$.

Démonstration. Trivial : faire les deux sens proprement, avec les .... et par récurrence. □

Définition 3.4. Une suite $(u_n)_n$ est **géométrique** si on passe d'un terme au suivant en multipliant par un même nombre q appelé **raison** de la suite.
Ainsi la suite est définie par : $\left\{ \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & u_n \times q \\ u_0 & & donnee \end{array} \right.$ (*définition par récurrence*)

Remarque 3.5. Pour montrer que (u_n) est géométrique, on montre que $u_{n+1} = q \times u_n$ (q doit être constant (indépendant de n))

Proposition 3.6. *Si (u_n) est géométrique de raison q, alors $u_n = u_0 \times q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
La réciproque est vraie : si $u_n = b \times a^n$ alors (u_n) est géométrique de raison a et tel que $u_0 = b$.

Démonstration. Trivial, faire le premier sens avec les ... . □

Définition 3.7. Une suite $(u_n)_n$ est **arithmético-géométrique** si la suite est définie par : $\left\{ \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & a \times u_n + b \\ u_0 & & donnee \end{array} \right.$ (*définition par récurrence*)

Perspective 3.8. Soit $\left\{ \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & 3u_n + 2 \\ u_0 & = & 1.5 \end{array} \right. \forall n \in \mathbb{N}$.
On cherche à trouver une expression explicite pour u_n.
On constate que $v_n = u_n + 1$ est géométrique de raison 3 car :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 3u_n + 2 + 1 = 3(u_n + 1) = 3v_n$.
Ainsi $v_n = v_0 \times 3^n = 2.5 \times 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $u_n = v_n - 1 = 2.5 \times 3^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.9 (Méthode pour les suites arithmético-géométrique)**.** Si $u_{n+1} = au_n + b \ \forall n \in \mathbb{N}$ alors on trouve r tel que $ar + b = r$ et on montre alors que $v_n = u_n - r$ est géométrique de raison a. On trouve ainsi v_n en fonction de n puis u_n.

Démonstration. Si $u_{n+1} = au_n + b, \forall n \in \mathbb{N}$ et r tel que $ar + b = r$ et que l'on pose $v_n = u_n - r$:
$v_{n+1} = u_{n+1} - r = au_n + b - r = au_n + b - ar - b = a(u_n - r) = av_n$ donc (v_n) est bien géométrique de raison a. □

3.1 Rappels sur les sommes

Proposition 3.10. — $\sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

— $\sum_{k=a}^{b} k = \dfrac{b+a}{2} \times (b-a+1)$ *(moyenne des extrêmes fois nombres de termes).*

Démonstration. Faire la première preuve par réccurence et la deuxième par compensation des sommes. □

Exemple 3.11. Calculons : $\sum_{k=0}^{n} nk+1$

Calculons : $\sum_{k=3}^{n-1} 4k+2$

Propriété 3.12. *Si $q \neq 1$:*

— $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

— $\sum_{k=a}^{b} q^k = q^a \times \dfrac{1-q^{b-a+1}}{1-q} = premier terme \times \dfrac{1-q^{nbre de terme}}{1-q}$

Démonstration. On remarque que $(1-q)(1+q+q^2+...+q^n) = 1-q+q-q^2+q^2+....-q^{n+1}) = 1-q^{n+1}$ d'où le résultat. De plus, $\sum_{k=a}^{b} q^k = \sum_{k=0}^{b} q^k - \sum_{k=0}^{a-1} q^k = \dfrac{1-q^{b+1}}{1-q} - \dfrac{1-q^a}{1-q} = \dfrac{q^a-q^{b+1}}{1-q} = q^a \dfrac{1-q^{b+1-a}}{1-q}$. □

Exemple 3.13. Calculons : $\sum_{k=2}^{n+2} 2^{k+1}$.