Chapitre 11 : Continuité des fonctions réelles

Dans ce chapitre, on considère des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On note D_f le domaine de définition de f et I un intervalle non vide inclus dans D_f.

1 Rappel : continuité en un point.

À savoir par coeur :

Soit $x_0 \in D_f$.

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe et est finie}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe et vaut } f(x_0)$$

f est continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en x_0.

Remarque 1.1. Ainsi f est continue en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

Exemple : Que dire de la continuité de la fonction partie entière en 0,5 ? en 1 ?

2 Continuité sur un intervalle

À savoir par coeur :

Définition 2.1. Une fonction est dite continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I. On note $C(I,\mathbb{R})$ ou $C^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.2. *(admis)*

— *Si f et g sont continues sur I et λ est un réel, alors $f+g$, $f.g$ et $\lambda.f$ sont continues sur I. Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.*

— *Si g continue sur un intervalle J et si f est continue sur I et à valeurs dans J, alors $g \circ f$ est continue sur I.*

— *Les fonctions polynomiales, fractions rationnelles, racine, sinus, cosinus, logarithme népérien, exponentielle, tangente, valeur absolue sont continues en tout point où elles sont définies.*

Remarque 2.3. Ce théorème permet de justifier la continuité de fonctions construites à partir de fonctions usuelles.

Exemple 2.4. 1. Soit $g : x \mapsto x\ln(1-x^2)$. Préciser D_g puis montrer que g est continue sur D_g.

2. Soit $h : x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x < 1 \\ 3x - 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$. Etudier la continuité de h sur $\mathbb{R}$.

3. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}_+$ de $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} x - x(\ln x)^2 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

3 Continuité et suites

Proposition 3.1. *Soient $f :\to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{+\infty; -\infty\}$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$. On suppose que $f(x) \to l$ quand $x \to a$. Alors, pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = l$.*

En clair, si f est continue en a alors pour tout suite (u_n) tendant vers a, $f(u_n)$ tend vers $f(a)$.

Démonstration. En effet, □

Exemple 3.2. Montrer par l'absurde que la fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

Remarque 3.3. Attention, l'hypothèsede continuité en a de f est essentielle : regardons par exemple les cas $f(x) = \lfloor x \rfloor$ et $u_n = \dfrac{n}{n+1}$:

4 Continuité par morceaux

Définition 4.1. Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
f est dite **continue par morceaux** ssi il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i; a_{i+1}[$ admette un prolongement continue sur $[a_i; a_{i+1}]$ (en clair, f admet des limites à gauche et à droite en chaque a_i).

Exemple 4.2. La fonction suivante est continue par morceaux :

5 Théorème des valeurs intermédiaires

À savoir par coeur :

Théorème 5.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a et b deux éléments quelconques de I. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c compris entre a et b tel que $y = f(c)$.*

Remarque 5.2. c existe mais il n'est pas nécessairement unique.

Exemple 5.3. Cas particulier très courant d'utilisation :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a et b deux éléments quelconques de I tels que $f(a).f(b) < 0$. Alors il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Démonstration. (c'est également l'agorithme de dichotomie)
Supposons $a < b$, $f(a) > y$ et $f(b) < y$. Construisons les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence de la manière suivante : $a_0 = a$, $b_0 = b$, et si pour $n \geq 0$, a_n et b_n sont construits, nous définissons alors :

— $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \leq y$.

— $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > y$.
Nous avons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) > y$ et $f(b_n) \leq y$. De plus, aussi par récurrence, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et $b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n}(b-a)$.

Donc ce sont des suites adjacentes, donc elles convergent, et leurs limites sont égales. Appelons c cette limite. On a $a_0 \leq c \leq b_0$, donc $c \in [a,b]$.
Alors, comme f est continue en c, $f(a_n)$ converge vers $f(c)$, et comme $f(a_n) > y$ pour tout n, à la limite nous avons $f(c) \geq y$.
De même, $f(b_n)$ converge vers $f(c)$, et comme $f(b_n) \leq y$ pour tout n, à la limite nous avons $f(c) \leq y$. Donc $f(c) = y$. □

Exemple 5.4. montrer que $g : x \mapsto 3x^{31} + x^8 + 1$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Image d'un intervalle par une fonction :

Rappelons que l'ensemble noté $f(I)$ est l'ensemble qui contient les images de tous les éléments de I.
On écrit : $f(I) = \{f(x), x \in I\}$.

Dans les trois cas suivants, tracer le graphe de la fonction sur $I =]-1,2[$ puis donner l'image de l'intervalle I par f.

(1) $f : x \mapsto x^2$ (2) $f : x \mapsto \begin{cases} x-1 \text{ si } x < 0 \\ x+1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ (3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$

L'image d'un intervalle par une fonction est-il toujours un intervalle ?

Un autre énoncé du théorème des valeurs intermédiaires, équivalent à celui qui figure un peu plus haut :

Proposition 5.5. *L'image d'un intervalle par une fonction* ***continue*** *est un intervalle.*

Démonstration. En effet : □

6 Image d'un segment par une fonction continue

Définition 6.1. — Un **segment** est un intervalle du type $[a,b]$ avec a et b réels tels que $a<b$.

Théorème 6.2. *(admis) L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*
Autrement dit, si f est continue sur le segment $[a,b]$, alors $m=\min_{t\in[a,b]} f(t)$, et $M=\max_{t\in[a,b]} f(t)$ existe et il existe $(c,d)\in[a,b]^2$ avec $f(c)=m$ et $f(d)=M$ (on dit que f est bornée et atteint ses bornes). On a que $f([a,b])$ est le segment $[m,M]$.

Exercice 1. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$ pour n entier naturel. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.

7 Théorème de la bijection monotone

Rappel : Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f:A\to B$ une fonction. Quand dit-on que f est une bijection de A vers B ?

Théorème 7.1. *Théorème de la bijection monotone : Soit f une fonction* ***continue*** *et* ***strictement monotone*** *sur un* ***intervalle*** *I.*
Alors f définit une bijection de I sur l'intervalle $J=f(I)$.
Donc, pour tout réel b appartenant à J, l'équation d'inconnue $x\in I$: $f(x)=b$ admet exactement une solution.

Démonstration. On a : □

Utile pour trouver $f(I)$:

Remarque 7.2. L'intervalle J se détermine facilement, connaissant I et la monotonie de f :
si $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}$ sont les extrémités de I, on a :

$I =$	si f est croissante , $f(I) =$	si f est décroissante, $f(I) =$
$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a) \right]$
$]a,b]$	$\left] \lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \right[$
$]a,b[$	$\left] \lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \right[$

Exercice 2. Soit f la fonction $(x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \ln(x) \in \mathbb{R})$. Montrer que f est bijective. En déduire que l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^* : x - 2 + \ln(x) = 0$ admet une unique solution.

À savoir par coeur :

Théorème 7.3. *Théorème de la bijection monotone (propriétés de la bijection réciproque) :*
*Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un **intervalle** I. f est alors bijective de I sur l'intervalle $J = f(I)$. De plus :*

- *Sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens de variation que f sur J.*
- *Dans un repère orthonormé, la courbe de f^{-1} se déduit de celle de f par symétrie par rapport à la première bissectrice.*

Démonstration. En effet, □

Illustration de la propriété de symétrie par rapport à la première bissectrice :

Application à la définition d'une suite "implicite" : voici un exercice où le mode de définition de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ utilise le théorème de la bijection monotone.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^5 + nx - 1$.

1. Etudier les variations de f_n.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$. En déduire que la suite (u_n) est convergente, et donner sa limite.

8 Application à connaitre : la fonction ARCTAN

Définition 8.1. la fonction "arctangente" notée arctan est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. Elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On sait que : □

Tableau de variations et courbe à connaitre parfaitement

Exercice 3.

1. Compléter la phrase suivante : $x = tan(y)$ avec $y \in]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ si et seulement si $y =$ .....
2. Calculer alors $arctan(0)$, $arctan(1)$ et $arctan(\sqrt{3})$.
3. Montrer que $arctan$ est impaire et en déduire 2 autres valeurs