HEC ECS 1 : Sommes, produits, factorielles, binômes de Newton

1 Les sommes

1.1 Sommes simples

Notation 1.1. Pour tout entier naturel n non nul, si x_1,x_2,...,x_n désignent des réels ou des complexes, la somme $x_1+x_2+...+x_n$ se note symboliquement :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \ \ ou \ \ \sum_{k\in[[1;n]]} x_k \ \ ou \ \ \sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$$

k est l'indice de sommation, 1 et n sont les bornes de la somme.
Plus généralement, on définit :

$$x_p+...+x_n=\sum_{k=p}^{n} x_k$$

De même, pour I un sous ensemble de $\mathbb{N}$, on définie $\sum\limits_{k\in I} x_k$ la somme des x_k où k parcourt toutes les valeurs de I.

Remarque 1.2.

1. Si $I=\emptyset$ alors la somme est nulle.
2. L'indice k est muet, on a

$$\sum_{k=1}^{n} x_k=\sum_{j=1}^{n} x_j=\sum_{z=1}^{n} x_z$$

Exemple 1.3.

1. $\sum\limits_{k=4}^{8}\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\sqrt{5}-\sqrt{4}+\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{6}+\sqrt{8}-\sqrt{7}+\sqrt{9}-\sqrt{8}=\sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2=1$
   $\sum\limits_{k=1}^{5}(k+1)^2-(k-1)^2=2^2-0^+3^2-1^2+4^2-2^2+5^2-3^2+6^2-4^2=36+25-1=50$
   $\sum\limits_{k=3}^{n}2=2\times(n-3+1)=2(n-2)=2n-4$
2. Écrire avec le symbole $\sum$ les sommes suivantes :
   (a) $\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+...+\dfrac{1}{200\times 201}=\sum\limits_{k=2}^{200}\dfrac{1}{k(k+1)}$
   (b) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+...-\dfrac{1}{121}=\sum\limits_{k=2}^{11}\dfrac{(-1)^k}{k^2}$
   (c) $1-q+q^2-q^3+....+(-1)^n q^n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k q^k=\sum\limits_{k=0}^{n}(-q)^k$.

Proposition 1.4. *Soient $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ 2 familles de complexes et $\lambda\in\mathbb{C}$. On a :*

$$\sum_{i\in I}(a_i+b_i)=\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in I} \ et \ \sum_{i\in I}\lambda a_i=\lambda\sum_{i\in I}a_i$$

Démonstration. On remarque : La preuve est facile, cela s'écrit avec les ... . □

Remarque 1.5. La relation de Chasles pour les sommes s'exprime :

$$\sum_{i=n}^{m} a_i=\sum_{i=n}^{p} a_i+\sum_{i=p+1}^{m} a_i$$

pour $n,p,m\in\mathbb{N}$ avec $n\leqslant p\leqslant m$.

Proposition 1.6. *Les changements d'indices*

1. *Soit 2 entier naturels n et p avec $n \leqslant p$ et m un entier (positif ou négatif), alors on a :*

$$\sum_{k=p}^{n} x_{k+m} = \sum_{i=p+m}^{n+m} x_i$$

On a alors effectué le changement d'indice $i = k+m$.

2. *Soit 2 entier naturels n et p avec $n \leqslant p$ et m un entier tel que $m \geqslant n$, alors on a :*

$$\sum_{k=p}^{n} x_{m-k} = \sum_{i=m-n}^{m-p} x_i$$

On a alors effectué le changement d'indice $i = m-k$.

Exemple 1.7. 1. Par le changement de variables $j = i+1$: $\sum_{i=1}^{2n} \frac{e^i}{(i+1)^2} = \sum_{j=2}^{2n+1} \frac{e^{j-1}}{j^2} = \frac{1}{e} \sum_{j=2}^{2n+1} \frac{e^j}{j^2}$

2. Par le changement de variables $j = n-k$, $\sum_{k=1}^{n} (k+1)\sqrt{n-k} = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j+1)\sqrt{j}$

Remarque 1.8. Les autres changements de variables sont dangereux car risque de changer le nombres de termes de la somme.

Proposition 1.9. *Les sommes usuelles On a les résultats suivants pour $n \in \mathbb{N}$:*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

avec $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

Exemple 1.10. 1. Par le changement de variables $j = k-1$, $\sum_{k=2}^{n+1} (k^2-2k+1) = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. $\sum_{k=0}^{n+1} k(n-k) = \sum_{k=0}^{n+1} kn - k^2 = n\sum_{k=0}^{n+1} k - \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = n\frac{(n+1)(n+1+1)}{2} - \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = (n+1)(n+2)[\frac{3n}{6} - \frac{2n+3}{6}] = (n+1)(n+2)\frac{(n-3)}{6}$

3. Soit ω une racine de l'unité n-ième, c'est à dire un complexe telle que $w^n = 1$. Calculer $1+\omega+\omega^2+...+\omega^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1}{1-\omega}$

Perspectives 1.11. Les sommes télescopiques
Calculons : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ en calculant : $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$ et donc :
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

Une somme de la forme $\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1}^n a_{k+1} - a_k)$ est appelée somme télescopique. on a que :
$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = (a_{p+1} - a_p) + (a_{p+2} - a_{p+1}) + ... + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_p$

Exemple 1.12. $\sum_{k=2}^{n} ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} ln(k-1) - ln(k) = ln(1) - ln(n) = -ln(n) = ln(\frac{1}{n})$

1.2 Sommes doubles

L'espressions somme double est employée lorsque la famille sur laquelle porte la somme est du type $I = [[1;p]] \times [[1;n]]$. Par exemple :
$\sum_{(i,j)\in[[1;2]]\times[[3;5]]} i^2(2-j) = ... = -30$
Les 6 termes de la somme correspondent aux couples d'indices : $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$.

Proposition 1.13. *Soient $n, p \in \mathbb{N}$, $I = [[1,p]] \times [[1;n]]$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ une famille finie de complexe, on a :*

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}$$

Démonstration. C'est trivial : il suffit de grouper les termes d'indices i (ou j) fixés. □

Exemple 1.14. Calculons $\sum_{(i,j)\in[[1;n]]^2} i+j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i+j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n}(ni + \frac{n(n+1)}{2}) = n\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1)$

Calculons $\sum_{(i,j)\in[[1;n]]^2} ij = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} i\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

2 Les produits

Définition 2.1. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de complexes où I est une sous ensemble de $\mathbb{N}$. On définit : $\prod_{i\in I} a_i$ le produit de tous les nombres de la famille.
Si $I = [[1;n]]$ on peut noter $\prod_{i\in I} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times ... \times a_n$.
De plus on définit $n! = \prod_{k=1}^{n}$. (on définit par convention $0! = 1$).

Exemple 2.2. Calculons $\prod_{k=1}^{6} k = 6! = 720$ Calculons $\prod_{k=i+1}^{n} k = \frac{n!}{i!}$

Proposition 2.3. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ 2 familles finies de complexes avec $I = [[1;n]]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :*

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda a_i = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i \text{ et } \prod_{k=1}^{n}(a_i b_i) = \prod_{k=1}^{n} a_i \times \prod_{k=1}^{n} b_i$$

Remarque 2.4. Supposons $a_i \neq 0$, $\forall i \in [[1;n]]$, $\prod_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_n}{a_1}$ De plus, on a que, si $a_i > 0$, $\forall i \in [[1;n]]$, $ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} ln(a_i)$.
Calculons alors $\prod_{k=1}^{n} e^{6k^2}$:
$ln\left(\prod_{k=1}^{n} e^{6k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} ln(e^{6k^2}) = \sum_{k=1}^{n} 6k^2 = 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n(n+1)(2n+1)$
Ainsi $\prod_{k=1}^{n} e^{6k^2} = exp(ln(\prod_{k=1}^{n} e^{6k^2})) = exp(n(n+1)(2n+1))$

Exemple 2.5. Calculons : $\prod_{k=1}^{n} 5 = 5^n$,
$\prod_{k=1}^{n}(-1) = (-1)^n$,
$\prod_{k=1}^{n} 5\times 4^k = 5^n \times 4^{1+2+...+n} = 5^n \times 4^{n(n+1)/2}$
et (défi) : $\prod_{(i,j)\in[[1;n]]^2} ij = n!^2$

3 Factorielles et coefficients binomiaux

Définition 3.1. Soient n et p 2 entiers naturels avec $n \geqslant p$. On définit le coefficient binomial "n parmi p" par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Par convention, si $n < p$ alors $\binom{n}{p} = 0$.

Exemple 3.2.

1. $\binom{4}{3} = 4$, $\binom{7}{3} = \frac{7\times 6\times 5}{6} = 35$.
2. Calculons, avec $n \geqslant 2$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$
3. Calculons, avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2}$

Proposition 3.3. *Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant n$*

1. $$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

2. $$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

   (c'est la formule de Pascal)

Démonstration. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant n$:
$\binom{n}{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$.
$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} + \dfrac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \dfrac{n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)!} + \dfrac{n!(n-p)}{(p+1)!(n-p-1)!} = \dfrac{n!(p+1+n-p)}{(p+1)!(n-p)!} = \dfrac{n!(n+1)}{(p+1)!(n-p)!} = \dfrac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-(p+1))!} = \binom{n+1}{p+1}$ □

Perspectives 3.4. Triangle de Pascal

Remarque 3.5. 2 autres formules sont souvent utilisées en exercices, mais leur démonstration est à maîtrisée :

1. $$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

   avec $p, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soient $n, l, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant l \leqslant n$:
$$\binom{l}{p}\binom{n}{l} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{l-p}$$

Démonstration. $\dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \dfrac{n}{p}\dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$
$\binom{l}{p}\binom{n}{l} = \dfrac{l!}{p!(l-p)!}\dfrac{n!}{(n-l)!l!} = \dfrac{n!}{p!(p-l)!(n-l)!}$ et
$\binom{n}{p}\binom{n-p}{l-p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}\dfrac{(n-p)!}{(l-p)!(n-p-(l-p))!} = \dfrac{n!}{p!}\dfrac{1}{(l-p)!(n-l)!} = \binom{l}{p}\binom{n}{l}$. □

Théorème 3.6. *Le binôme de Newton Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, on a :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. On prouve par récurrence la propriété : $P(n)$: "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$"

I : $n=0$, $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

H : supposons qu'il existe n tel que la propriété est vraie au rang n et prouvons la au rang $n+1$:

$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$

De plus, par le changement de variables $j = k+1$,

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-(j-1)} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}$

Ainsi $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = a^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} =$

$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n+1-k} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1}\right) + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Exemple 3.7.

1. Calculons : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
   $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$,
   $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 6b^3a + b^4$,
   $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 6b^3a + b^4$,
   $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}$,
   $(2x+y^2)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (2x)^k y^{2n-2k}$.
2. $A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$,
   $B = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1+(-1))^n = 0$ et
   Par le changement de variables $j = k+1$, $C = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=2}^{n} \binom{n+1}{j} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} - \binom{n+1}{n+1} - \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{1} = (1+1)^n - 2 - (n+1) = 2^n - n - 3$.
3. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}(a-b) = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = ab^{n-1} - b^n + a^2b^{n-1} - ab^{n-1} + \ldots + a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 + a^n - a^{n-1}b = a^n - b^n$