Raisonnement : implication, absurde, contraposée, équivalence, récurrence et analyse-synthèse

1 Les implications et l'équivalence

1.1 Définition

Définition 1.1. On dit qu'une proposition P implique une proposition Q lorsque l'on a : si P est vraie alors Q est vraie. On note alors cela $P \Rightarrow Q$. On dit que P est suffisante à Q et que Q est nécessaire à P.
On appelle implication réciproque de $P \Rightarrow Q$ l'implication : $Q \Rightarrow P$. (Attention, la véracité de $P \Rightarrow Q$ n'est pas liée à celle que $Q \Rightarrow P$).
Dans le cas où $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$, on dit que P et Q sont équivalente et on note $P \Leftrightarrow Q$.

Exemple 1.2. La proposition $x = x^2 \Rightarrow x \geqslant 0$ est vraie (en effet si $x = x^2$ alors comme $x^2 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$) mais sa réciproque "$x \geqslant 0 \Rightarrow x = x^2$" est fausse car on peut trouver un contre exemple : $x = 2 \geqslant 0$ mais $x \neq x^2$.

1.2 Comment démontrer une implication ?

On peut démontrer une équivalence des 3 manières différentes. La première est la démontration directe, on montre que si P est vraie alors ..... alors Q est vraie.
Les deux suivantes sont détaillées dans les parties suivantes :

1.2.1 Le raisonnement par l'absurde

Proposition 1.3. *Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie, on suppose que P et vraie et que Q est fausse et on trouve une absurdité.*

Exemple 1.4. Montrer qu'il n'existe pas 3 réels a, b, c tels que $e^x = ax^2 + bx + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Si on supposons qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = ax^2 + bx + c$ alors en particulier $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^2 + bx + c$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} ax^2 + bx + c = 0$.
Or si $a \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} ax^2 + bx + c = signe(a)\infty$ ce qui est absurde donc forcément $a = 0$
Mais alors $\lim\limits_{x \to -\infty} ax^2 + bx + c = \lim\limits_{x \to -\infty} bx + c$.
Si $b \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} bx + c = signe(b)\infty$ ce qui absurde donc $b = 0$. Mais alors $e^x = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est absurde.
Ainsi il n'existe pas 3 réels a, b, c tels que $e^x = ax^2 + bx + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.2.2 La contraposée

Définition 1.5. La contraposée de la proposition $P \Rightarrow Q$ est la proposition $nonQ \Rightarrow nonP$.

Proposition 1.6. *Une implication et sa contraposée ont même caractère de vérité.*

Exemple 1.7.
1. Donner la contraposée de "si la figure est un losange, alors elle a 4 côtés".
   Si la figure n'a pas quatre côtés alors ce n'est pas une losange.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, x \leqslant \varepsilon\right) \Rightarrow x = 0$.
   Montrons la contraposée : si $x \neq 0$ alors $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, x > \varepsilon$.
   En effet si $x \neq 0$ alors en prenant $\varepsilon = \dfrac{x}{2}$, on a $x > \varepsilon$ car $x > \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x - \dfrac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} > 0$ (et on a $x > 0$).

1.3 Comment démontrer une équivalence ?

Les 2 méthodes : La démontration la plus sûre est la double implication : on démontre que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ indépendemment. Sinon il est possible de démontrer une équivalence directement : on montre que $P \Leftrightarrow R \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow Q$. Néanmoins, il faut être sûr des équivalences que l'on affirme (ne pas confondre $P \Leftrightarrow R$ et $P \Rightarrow R$)

Exemple 1.8. 1. Avec la méthode directe : montrons $e^{2x+1} = 1 \Leftrightarrow x = -1/2$. En effet $e^{2x+1} = 1 \Leftrightarrow 2x+1 = ln(1) = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$.

2. Un raisonnement faux avec la méthode directe :
$\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
3. Par double implication : Montrons que $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$ et $B \geqslant 0$.
Montrons $\sqrt{A} = B \Rightarrow A = B^2$ et $B \geqslant 0$: en effet, si $\sqrt{A} = B$ alors par définition de la racine carrée, $B = \sqrt{A} \geqslant 0$ et $B^2 = A$.
Montrons $A = B^2$ et $B \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{A} = B$.
En effet, si $A = B^2$ et $B \geqslant 0$ alors $A \geqslant 0$ et $B = \sqrt{A}$ ou $B = -\sqrt{A}$. Or $B \geqslant 0$ donc $B = \sqrt{A}$.

2 Le raisonnement par récurrence

2.1 La récurrence à un pas

Le raisonnement s'articule autour de 4 points :

1. On énonce clairement l'hypothèse de récurrence.
2. L'initialisation où l'on vérifie l'hypothèse de récurrence au premier rang.
3. L'hérédité où l'on prouve que la propriété $P(n+1)$ est vraie sous reserve que $P(n)$ le soit, pour un entier n quelconque.
4. La conclusion : on résume en signalant que l'on a initialisé et fait l'hérédité, on donne alors la propriété ainsi prouvée en invoquant le principe de récurrence.

Exemple 2.1. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = (\sum_{k=0}^{n} k)^2$.
Classique et sans difficulté.

2.2 La récurrence à deux pas

Le principe est le même, sauf que :

1. On initialise pour les deux premiers rangs.
2. Dans l'hérédité : on prouve que la propriété $P(n+1)$ est vraie sous reserve que $P(n)$ et $P(n-1)$ soient vraies, pour un entier n quelconque.

Exemple 2.2. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 & = & u_1 = 1 \\ u_{n+2} & = & 5u_{n+1} - 6u_n \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.
Classique et sans difficulté, attention tout de même a l'initialisation.

Remarque 2.3. On peux effectuer des récurrences à p pas pour $p \in \mathbb{N}^*$.

2.3 La récurrence forte

Le principe est identique à la récurrence à un pas, sauf que dans l'hérédité : on prouve que la propriété $P(n+1)$ est vraie sous reserve que $P(n)$, $P(n-1)$, ... , $P(0)$ soient vraies , pour un entier n quelconque.

Remarque 2.4. 1. On peut initialiser la récurrence à un autre rang que 0.

2. Attention, une récurrence forte ne réalise pas une récurrence à 2 pas car l'initialisation de la récurrence forte demande la preuve de $P(0)$ alors que celle à 2 pas demande $P(0)$ et $P(1)$.

Exemple 2.5. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_n & = & u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2^n$.
On montre par réccurence la proposition $P(n)$: "$u_n \leqslant 2^n$".
I : $u_0 = 1 \leqslant 2^0$.
H : supposons qu'il existe un entier n tel que $P(k)$ soit vraie pour $k = 0, 1...., n$ et montrons $P(n+1)$.
$u_{n+1} = u_0 + ... + u_{n-1} + u_n \leqslant 2^0 + ... + 2^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1 \leqslant 2^{n+1}$
Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, ainsi elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 L'existence et l'unicité

La méthode : Pour montrer l'existence d'un unique objet respectant la propriété P, on peut procèder de la manière suivante :
1) On montrer l'existence d'un objet respectant P
2) On montre ensuite l'unicité, pour cela, on suppose qu'il existe deux objets respectant P et on montre qu'ils sont alors égaux.

Exemple 3.1. Montrons l'existence d'un unique x positif tel que $x^2 = 1$.
Existence : 1 fonctionne.
Unicité : supposons qu'il existe x et x', positifs, tel que $x^2 = 1$ et $x'^2 = 1$. Alors $x^2 = x'^2$ et donc $x = x'$ ou $x = -x'$ mais comme x et x' sont positifs, alors $x = x'$

4 L'analyse synthèse

On applique ce genre de raisonnement lorsque l'on souhaite montrer l'existence d'un ou plusieurs éléments tels que l'énoncé P soit vrai. On réalise alors 2 étapes :

1. L'analyse où l'on identifie les candidats possibles. On suppose que de tels éléments existent puis on essaye de trouver des conditions nécessaires à leur existence ("on réduit les possibilités")
2. La synthèse où l'on vérifier si les candidats possibles sont bien les solutions ("on teste les possibilités qu'il reste").

Exemple 4.1.

Montrer que pour tout $y \neq 0.5$, il existe $x \neq 0.5$ tel que $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$.
Soit $y \neq 0.5$ .Analyse : On suppose qu'il existe un tel x : alors $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$ et $2x-1 \neq 0$, donc $y(2x-1) = x+1$ et donc $2xy - x = 1-y$ et donc $x = \dfrac{1-y}{2y-1}$ (possible car $y \neq 0.5$).
Synthèse : on vérifie que ce x fonctionne :
Si on pose $x = \dfrac{1-y}{2y-1}$ alors $x \neq 1/2$: en effet si $\dfrac{1-y}{2y-1} = 1/2$ alors $1-y = \dfrac{2y-1}{2}$ et donc $y = 1/2$ ce qui est absurde.
De plus, $\dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{\dfrac{1-y}{2y-1}+1}{2\dfrac{1-y}{2y-1}-1} = \dfrac{\dfrac{1-y+2y-1}{2y-1}}{\dfrac{2-2y-(2y-1)}{2y-1}} = \dfrac{y}{2y-1} \times \dfrac{2y-1}{1} = y$.
Résoudre $2\sqrt{x+6} = 3x+2$ par analyse synthèse.
Analyse : On suppose qu'un tel x existe :
Ainsi : $2\sqrt{x+6} = 3x+2$ et donc $4(x+6) = (3x+2)^2$ et ainsi $4x+24 = 9x^2+12x+4 \Leftrightarrow 9x^2+8x-20 = 0$.
On résout cette équation : $\Delta = 64 + 80 \times 9 = 8 \times 8 + 8 \times 90 = 8 \times 98 = 16 \times 49$.
Ainsi $\sqrt{\Delta} = 28$ et donc $9x^2+8x-20 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-8-28}{18} = -2$ ou $x = \dfrac{-8+28}{18} = \dfrac{10}{9}$
On résume : si $2\sqrt{x+6} = 3x+2$ alors $x = -2$ ou $x = \dfrac{10}{9}$.
Synthèse : $x = -2$ ne fonctionne pas car $2\sqrt{-2+6} = 4$ et $3 \times (-2) + 2 = -4$.
$x = \dfrac{10}{9}$ est la solution (unique par analyse synthèse) car $2\sqrt{\dfrac{10}{9}+6} = 2\sqrt{\dfrac{64}{9}} = 2\dfrac{8}{3} = \dfrac{10}{3}$ et $3 \times \dfrac{10}{9} + 2 = \dfrac{10}{3} + \dfrac{6}{3} = \dfrac{16}{3}$.
Montrer que toute fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ se décompose comme somme d'une fonction constante et d'une fonction s'annulant en 1.
Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.
Analyse : supposons qu'il existe g et h deux fonctions, g constante et h s'annulant en 1 tel que $f = g + h$.
Ceci signifie : il existe une constante c et une fonction h tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c + h(x)$ avec $h(1) = 0$.
Donc $f(1) = c + 0$ et donc $c = f(1)$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - c$
Synthèse : on vérifie que la constante $f(1)$ et la fonction h définie par $h(x) = f(x) - f(1)$ fonctionne.
$h(1) = f(1) - f(1) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c + h(x)$ car $c + h(x) = f(1) + f(x) - f(1) = f(x)$.