HEC ECS 1 : Ensembles et applications

1 Retour sur la logique

Définition 1.1. Une **proposition** est un énoncé qui est soit vrai, soit faux. Cet énoncé peut dépendre d'un réel x, d'un entier naturel n, d'une suite $(u_n)\cdots$ etc.

On appelle **quantificateurs** les signes $\forall$ ("pour tout" ou "quel que soit") et $\exists$ ("il existe", sous-entendu au moins un).

Exemple 1.2. Ces propositions sont-elles vraie ou fausse ? $\forall x \in \mathbb{R}, x = \lfloor x \rfloor$ et $\exists x \in \mathbb{R}, x = \lfloor x \rfloor$
La première est fausse, il suffit de donner un contre exemle : $2.7 \in, 2.7\rfloor = 3 \neq 2.7$
La deuxième est vraie : il suffit de constater $2 = \rfloor 2 \lfloor$.

Remarque 1.3. Trouver la différence entre les 2 propositions suivantes :
Soit (u_n) une suite. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leq M$
La première est la définition de "la suite $(u_n)_n$ est majorée".
Dans la seconde, même si c'est implicite, le réel M peut dépendre du choix de n :
Par exemple la suite (u_n) définie par $\forall n \in, u_n = n$.
Alors pour tout $n \in$, il existe $M = n+1 \in, u_n \leqslant M$. Néanmoins, il n'existe pas de M tel que $\forall n \in, u_n \leqslant M$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

A partir de deux propositions P et Q, on en forme de nouvelles : (P et Q) , (P ou Q) et ($P \Rightarrow Q$)
(P et Q) est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies.
(P ou Q) est vraie lorsque : P est vraie et Q fausse ou bien Q est vraie et P fausse ou bien P et Q sont vraies toutes les deux.
($P \Rightarrow Q$) est vraie lorsque si P est vraie, alors Q aussi.
L'**implication réciproque** de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$.

Exemple 1.4. Lorsqu'on montre qu'une proposition dépendant d'un entier n est héréditaire, on montre une implication : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Par exemple : Si cette proposition est "$3^n \geq 1+2n$" :
$3^n \geq 1+2n \Rightarrow 3^{n+1} \geq 3(1+2n) = 3+6n = 1+2(n+1)+4n$
$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 1+2(n+1)$ car $4n \geq 0$.
Attention, le raisonnement suivant est faux :
$3^n \geq 1+2n \Leftrightarrow 3^{n+1} \geq 3(1+2n) = 3+6n = 1+2(n+1)+4n$
$\Leftrightarrow 3^{n+1} \geq 1+2(n+1)$ car $4n \geq 0$.

Remarque 1.5. On a que :

1. "non(A et B)"="non A ou non B"
2. "non(A ou B)"="non A et non B"
3. "non($\forall x, P(x)$)"="$\exists x, nonP(x)$"
4. "non($\exists x, P(x)$)"="$\forall x, nonP(x)$"

2 Ensembles

2.1 Généralités

Définition 2.1. On définit un ensemble si l'on est capable d'affirmer sans ambiguité qu'un objet appartient ou à cet ensemble : on dit alors que cet objet est un élément d l'ensemble.

Pour définir un ensemble, on peut :
— Lister tous les éléments.
— Donner une propriété caractérisant l'ensemble.
— Procéder par selection parmi un ensemble plus grand : par exemple : $\{n \in \mathbb{N} | n \textit{ est premier}\}$.
Notations :

1. $\emptyset$ désigne l'ensemble vide qui ne contient aucun élément.
2. $\{1,3\} = \{3,1\}$ et $\{3,3,3\} = \{3\}$.

Définition 2.2. On dit qu'un ensemble A est <u>inclus</u> dans un ensemble B (ou que A est une <u>partie</u> de B, ou <u>sous-ensemble</u> de B, ou que B contient A) lorsque : si $x \in A$, alors $x \in B$. On note : $A \subset B$.

Remarque 2.3. Attention à ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$. On a par exemple : $\{2\} \subset \mathbb{N}$ et $2 \in \mathbb{N}$. Ces écritures sont correctes (et disent la même chose), mais $2 \subset \mathbb{N}$ est incorrect.

Exemple 2.4.
1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
2. $\{-1,1\} \subset \left\{x \in \mathbb{R} / 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0\right\}$, mais ces deux ensembles ne sont pas égaux.
   Soit $x \in \{-1,1\}$, alors $x = 1$ ou $x = -1$ mais dans les deux cas $2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, car $2 \times 1^3 + 1^2 - 2 \times 1 - 1 = 0$ et $2 \times (-1)^3 + (-1)^2 - 2 \times (-1) - 1 = 0$
   Ces ensembles ne sont pas égaux car il existe $x \in \left\{x \in \mathbb{R} / 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0\right\}$ tel que $x \notin \{-1,1\}$: en effet, $2x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x^2 - 1)(2x + 1)$ et donc $-1/2$ est un tel exemple.

Remarque 2.5. On a toujours, étant donné un ensemble E : $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$.

Définition 2.6. L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$
"A est un sous-ensemble de E" se note formellement $A \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple 2.7.
1. $\mathbb{Z} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ signifie $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.
2. Soit $E = \{a,b,c\}$ avec a, b, c distincts deux à deux. On a $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
   On trouve 8 parties de E. Combien en trouverait-on en rajoutant un élément à E ?

Proposition 2.8. *Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On a :* $\boxed{A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)}$.

Remarque 2.9. C'est un principe de démonstration : pour montrer que deux ensembles sont égaux, on montre successivement les deux inclusions.

Soit l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$: $\sqrt{x} = x - 2$. On appelle S son ensemble de solution, c'est-à-dire $S = \{x \in \mathbb{R}_+ / \sqrt{x} = x - 2\}$. Déterminer S.
Expliquez pourquoi les deux solutions suivantes sont fausses.

1. On a $\sqrt{4} = 4 - 2$ c'est-à-dire que $x = 4$ vérifie bien l'équation, donc $S = \{4\}$.
   Ici on ne montre uniquement que $\{4\} \subset S$.
2. $\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = (x-2)^2$. On développe et on organise : $x^2 - 5x + 4 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 9$ donc $x = 1$ ou $x = 4$ d'où $S = \{1,4\}$.
   On ne montre uniquement que $S \subset \{1,4\}$.

Donnez une solution juste pour cet exercice :
$\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = (x-2)^2$. On développe et on organise : $x^2 - 5x + 4 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 9$ donc $x = 1$ ou $x = 4$ d'où $S \subset \{1,4\}$.
Ainsi, regardons que $1 \in S$ et $4 \in S$:
$\sqrt{1} \neq 1 - 2$ donc $1 \notin S$, $\sqrt{4} = 4 - 2$ donc $4 \in S$
Ainsi $S = \{4\}$, en effet, $S \subset \{4\}$ car $S \subset \{1,4\}$ et $1 \notin S$ et $\{4\} \subset S$.

2.2 Réunion, intersection

Définition 2.10. Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On appelle intersection de A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ET qui appartiennent à B.

On appelle réunion de A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A OU qui appartiennent à B (c'est-à-dire qui appartiennent soit à A seul, soit à B seul, soit aux deux à la fois : le OU n'est pas exclusif).

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.

Notation 2.11. $A \cap B$ pour l'intersection ; $A \cup B$ pour la réunion.

Remarque 2.12. On peut représenter graphiquement ceci par :

Exemple 2.13. $E = \mathbb{R}$, $A = [-1;9[$, $B =]-\infty;2[$. Donner $A \cap B$ et $A \cup B$.
$A \cap B =]2,9[$ et $A \cup B =]-\infty;9[$.

$E = \mathbb{N}$. A est l'ensemble des entiers pairs. B est l'ensemble des entiers impairs. A et B sont-ils disjoints ?
En effet, $A \cap B = \emptyset$ car :
$\emptyset \subset A \cap B$ trivialement.
$A \cap B \subset \emptyset$ car si $x \in A \cap B$ alors $x \in A$ et $x \in B$ et donc x est un entier pair et impair, c'est absurde.

$E = \mathbb{N}$. A est l'ensemble des entiers multiples de 3. B est l'ensemble des entiers multiples de 5. A et B sont-ils disjoints ?
Non car il existe $x \in A \cap B$; $15 \in A \cap B$ donc $A \cap B \neq \emptyset$

Remarque 2.14. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \cap A = A \cup A = A$.
$A \cap E = A$, $A \cup E = E$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$.
$A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$.
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ donc on note simplement $A \cap B \cap C$.
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ donc on note simplement $A \cup B \cup C$.

Les opérations $\cap$ et $\cup$ se généralisent à une famille infinie de sous-ensembles :

Définition 2.15. Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E.
$\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ désigne l'intersection de tous les A_i.
Autrement dit : $\boxed{x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \text{ signifie que pour tous les indices } i \in I, \text{ on a } x \in A_i}$.

$\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ désigne la réunion de tous les A_i.
Autrement dit : $\boxed{x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i \text{ signifie qu'il existe un indice } i \in I \text{ tel que } x \in A_i}$.

Exemple 2.16. $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} \{i\} = \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} [0,i] = \mathbb{R}_+$.

Déterminer $\bigcup\limits_{i=0}^{6} [i, i+1]$ et $\bigcap\limits_{i=0}^{6} [i, i+1]$.

il est trivial que $\bigcup\limits_{i=0}^{6} [i, i+1] = [0,7]$ et $\bigcap\limits_{i=0}^{6} [i, i+1] = \emptyset$.

Montrer que $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right[= \{0\}$.

Montrons le par double inclusion :
$\{0\} \subset \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right[$:
Soit $x \in \{0\}$ et donc $x = 0$ et comme pour tout $i \in [\![0;+\infty[\![$, $0 \in [0; \dfrac{1}{n+1}[$ alors $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right[$ ainsi $\{0\} \subset \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right[$.
$\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right[\subset \{0\}$: soit $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right[$:
alors pour tout $i \in$, $0 \leqslant x < \dfrac{1}{n+1}$ et donc, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, $0 \leqslant x \leqslant 0$ donc $x = 0$.

Proposition 2.17. *Soit E un ensemble et A, B, C des sous-ensembles de E. On a :*
$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$ *et* $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$
(l'opération $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$ et vice-versa).

On peut voir cela graphiquement avec des diagramme des veines :

Définition 2.18. Ces propriétés se généralisent : Soit $I \subset \mathbb{N}$, $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E, et A une partie de E. On a :
$\boxed{A \cap (\bigcup\limits_{i \in I} B_i) = \bigcup\limits_{i \in I} (A \cap B_i)}$ et $\boxed{A \cup (\bigcap\limits_{i \in I} B_i) = \bigcap\limits_{i \in I} (A \cup B_i)}$

Démonstration. Démonstration de $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: on procède par double inclusion comme souvent pour une égalité d'ensembles. La structure de la démonstration doit être la suivante :

1) Montrons que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$:
Soit $x \in A \cap (B \cup C)$, alors $x \in A$ et $x \in B \cup C$.
Deux cas possibles : soit $x \in B$, et comme $x \in A$ alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Soit $x \in C$, et comme $x \in A$ alors $x \in A \cap C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Ainsi $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2) Montrons que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$:
Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, et donc soit $x \in A \cap B$ soit $x \in A \cap C$:
Dans le premier cas, $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in B \cup C$ et donc $x \in A \cap (B \cup C)$.
Dans le second, $x \in A$ et $x \in C$ donc $x \in B \cup C$ et donc $x \in A \cap (B \cup C)$.
Ainsi $x \in A \cap (B \cup C)$. □

2.3 Les partitions (hors programme mais instructif)

Définition 2.19. soit $I \subset \mathbb{N}$, $(E_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. On dit que la famille $(E_i)_{i \in I}$ forme une partition de E lorsque :

— tous les E_i sont non vides.
— les E_i sont disjoints deux à deux.
— $\bigcup\limits_{i \in I} E_i = E$.

Remarque 2.20. Ainsi chacun des éléments de E appartient à une et une seule partie E_i.

Exemple 2.21. Soit $E=\{1,2,3,4\}$. Les sous-ensembles de E : $\{2\}$ et $\{1,3,4\}$ forment une partition de E, de même que $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ et $\{4\}$.
La famille d'intervalles $([i,i+1[)_{i\in\mathbb{Z}}$ forme une partition de $\mathbb{R}$, mais pas $([i,i+1[)_{i\in\mathbb{N}}$, ni $([i,i+1])_{i\in\mathbb{Z}}$. En effet :
Déjà les deux dernières : $([i,i+1[)_{i\in\mathbb{N}}$ ne peut pas é^t *reunepartitionde, car*-1 $\notin \bigcup_{k=0}^{+\infty}[k;k+1[$, et $([i,i+1])_{i\in\mathbb{Z}}$ ne peut pas é^t *reunepartitiond*
Pourlapremire,([i,i+1[)$_{i\in\mathbb{Z}}$ est bien une partition de car ces ensembles sont clairement disjoints, et pour tout $x\in$, $\lfloor x\rfloor \leqslant x<\lfloor x\rfloor+1$ et donc $x\in\bigcup_{i\in}[i,i+1[$. Ainsi $\subset\bigcup_{i\in}[i,i+1[$ et comme trivialement $\bigcup_{i\in}[i,i+1[\subset$ alors $\bigcup_{i\in}[i,i+1[=$.

2.4 Différences et complémentaires

Définition 2.22. Soit E un ensemble et A, B des sous-ensembles de E. On appelle complémentaire de A l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\complement A$ ou $\overline{A}$.

On appelle différence entre A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B. On la note $A\setminus B$ ou $A-B$ ou $\complement_A B$ (complémentaire de B dans A).

Exemple 2.23. $E=\mathbb{R}$, $A=[-1;9[$, $B=]1;+\infty[$. Déterminer $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.
Facile

Proposition 2.24. $\overline{\overline{A}}=A$
$A\subset B\Rightarrow \overline{B}\subset\overline{A}$.
Lois de Morgan : $\boxed{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}}$ *et* $\boxed{\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}}$
Faire un schéma illustrant une loi de Morgan :

Exercice 1. On définit la différence conjuguée de 2 ensembles par : $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

1. Interpréter géométriquement.
2. Montrer que $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.
3. Simplifier $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta\bar{A}$.
4. Trouver toutes les parties X de E telles ques $A\Delta X=\emptyset$.

Généralisation :
Soit $I\subset\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. On a : $\boxed{\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}}$ *et* $\boxed{\overline{\bigcap_{i\in I}A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}}$.

3 Produit cartésien

Définition 3.1. Soit A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien de A et B l'ensemble des couples (a,b) où a est un élément de A et b un élément de B. On note $A\times B$ le produit cartésien de A et B.

Exemple 3.2. $\{a,b\}\times\{c,d\}=\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$.

Plus généralement, le produit cartésien de n ensembles E_1, E_2,...,E_n est noté $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ et est formé par les n-uplets ou n-listes $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ où $x_1\in E_1$, $x_2\in E_2$, ... , $x_n\in E_n$. Si les ensembles sont tous égaux à E, on note $E\times E\times\cdots\times E=E^n$.

Exemple 3.3. $(1,2,3)$ et $(2,1,3)$ sont deux triplets ou 3-listes (différents) de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3.4. Que représente géométriquement $[0;1]^3$?
Le cube unité.

4 Applications

4.1 Généralités

Une application f est la donnée d'un triplet :

- un ensemble de départ E.
- un ensemble de d'arrivée F.
- un procédé qui a tout élément de E associe un élément de F.

Remarque 4.1. 1. Le mot "fonction" est souvent utilisé à la place du mot "application".

2. Deux applications f et g sont égales lorsqu'elles ont même ensemble de départ E , même ensemble d'arrivée, et lorsque pour tout élément x de E, on a $f(x) = g(x)$.
   Par exemple, les applications $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{pmatrix}$ et $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{pmatrix}$ ne sont pas égales.
3. Une application est bien définie lorsque tout élément à une unique image et que cette dernière est bien dans l'ensemble d'arrivée. Par exemple : $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (xz,yz) \in \mathbb{R}^2$.
   Donner une fonction mal définie :
   $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{\nvDash} & \to & \mathbb{R}+ \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{pmatrix}$

Définition 4.2. Soit $f : E \to F$ une application. Etant donné un élément y de F, si on peut trouver x dans E tel que $f(x) = y$, on dit que x est un antécédent de y.

Remarque 4.3. Rechercher des antécédents éventuels d'un élément y de l'ensemble d'arrivée revient à résoudre l'équation d'inconnue $x \in E : f(x) = y$. Certaines applications ont des propriétés particulières relativement au nombre de solutions.

Définition 4.4. Soit $f : E \to F$ une application.

1. On dit que f est une injection lorsque tout élément de F possède au plus un antécédent par f.
2. On dit que f est une surjection lorsque tout élément de F possède au moins un antécédent par f.
3. On dit que f est une bijection lorsque tout élément de F possède exactement un antécédent par f (autrement dit lorsque f est à la fois une injection et une surjection).

Exemple 4.5. 1. $f : \begin{pmatrix} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & k+3 \end{pmatrix}$ est injective, mais pas surjective.
   En effet, soit $n,n' \in$, si $f(n) = f(n')$ alors $n+3 = n'+3$ et donc $n = n'$.
   Ainsi f est injective.
   0 n'a trivialement pas d'antécédent ($0 = f(n) \Leftrightarrow n = -3$) donc f n'est pas surjective.

2. $g : \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ k & \mapsto & k+3 \end{pmatrix}$:
   L'injectivité se prouve de façon identique à la précdente.
   Pour la surjectivité, $y \in$ a au moins $y-3 \in$ comme antécédent, donc f est surjective, donc bijective.
3. $h : \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ k & \mapsto & k^2 \end{pmatrix}$ n'est ni injective, ni surjective.
   En effet, 1 a deux antécédents 1 et -1. et 2 n'a pas d'antécédent car sinon $\sqrt{2} \in$ ou $-\sqrt{2} \in$ ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Définition 4.6. Soit E un ensemble. L'application $f : E \to E$ définie pour tout x de E par $f(x) = x$ est appelée application identité de E (ou application identique de E). On note $f = Id_E$.

Proposition 4.7. *Soit $f : E \to F$ une application. f est une injection équivaut à : pour tous x et x' dans E, ($f(x) = f(x')$) $\Rightarrow$ ($x = x'$).*

Exercice 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que f est strictement monotone. Montrer que f est une injection.
En effet, soit $x,x' \in I$, si $f(x') = f(x)$ alors $x = x'$ car si $x \neq x'$ alors soit $x < x'$ et donc $f(x) < f(x')$ ou soit $x > x'$ et donc $f(x) > f(x')$: dans les deux cas c'est absurde. Ainsi $x = x'$

Exemple 4.8. Montrons que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to &]\frac{1}{3};1] \\ x & \mapsto & \dfrac{1+x}{1+3x} \end{cases}$ est bien définie et bijective.

Il faut montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\dfrac{1+x}{1+3x} \in]1/3,1]$.
Une étude rapide des variations de f montre ce résultat.
Sinon, $\dfrac{1+x}{1+3x} \leqslant 1 \Leftrightarrow 1+x \leqslant 1+3x \Leftrightarrow 0 \leqslant x$ (multiplication par $1+3x > 0$) qui est vraie.
Et $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1+x}{1+3x} \Leftrightarrow 1+3x < 3+3x \Leftrightarrow 1 < 3$ qui est vraie.
De plus, soit $y \in]1/3,1]$, $f(x) = y \Leftrightarrow 1+x = y(1+3x) \Leftrightarrow x(1-3y) = y-1 \Leftrightarrow x = \dfrac{y-1}{1-3y} \geqslant 0$ (division par $1-3y \neq 0$ car $y > 1/3$) car $y \in]1/3,1]$.
Ainsi pour tout $y \in]1/3,1]$, y a un unique antécédent dans $_+$ donc f est bijective.

Exemple 4.9. Montrer que (avec les bons ensembles de départ et d'arrivée) : si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est aussi (on montrera que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi et que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi)

En effet, supposons que f et g sont bijectives, donc injectives et surjectives.
On suppose d'ailleurs $f : E \to F$, $g : F \to G$.
Soit $x, x' \in E$, si $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ alors par injectivité de g, $f(x) = f(x')$ et donc par injectivité de f, $x = x'$, ainsi $g \circ f$ est injective.
Soit $y \in G$, montrons que y a un antécédent par $g \circ f$: comme g est surjective alors il existe $z \in F$ tel que $g(z) = y$ comme $z \in F$ et que f est surjective alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z$ et donc $y = g \circ f(x)$. Ainsi $g \circ f$ est surjective.

4.2 Restriction et prolongement

Définition 4.10. Soit $f : E \to F$ une application et soit A une partie de E. On appelle restriction de f à A l'application g de A vers F définie par : $\forall x \in A$, $g(x) = f(x)$. On note $g = f|_A$.

Soit A une partie de E et $f : A \to F$ une application. Toute application $g : E \to F$ telle que $\forall x \in A$, $g(x) = f(x)$ est appelée prolongement de f à E.

Exemple 4.11.

1. La fonction $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{pmatrix}$ est surjective et non injective, mais la fonction $f|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$ est bijective.
   f est non injective car 0 a une infinité d'antécédents.
   f est surjective se montre, non fait ici, à l'aide du th. des valeurs intermédiaires.
   $f|_{[-\pi/2;\pi/2]}$ est strictement croissante donc injective et surjective par le même argument que pour f et donc est bijective.
2. La fonction $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin x}{x} \end{pmatrix}$ admet une infinité de prolongements à $\mathbb{R}$. Par exemple $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour tout $x \neq 0$ et $g(0) = 3$, ou $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour tout $x \neq 0$ et $h(0) = 1$, ...etc. On remarque que :

4.3 Composition des applications

Définition 4.12. Soit E, F, G trois ensembles. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. L'application $h : E \to G$ définie par $h(x) = g(f(x))$ pour tout x de E est appelée application composée de g et f. On note $h = g \circ f$.

Exemple 4.13.

1. Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x-1 \end{pmatrix}$ et $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \end{pmatrix}$. Déterminer et représenter $g \circ f$ et $f \circ g$.
   Non fait ici, mais simple.
2. Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{pmatrix}$ et $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \exp x \end{pmatrix}$.
   Compléter : $g \circ f = Id_+^*$; $f \circ g = Id$

Remarque 4.14. La loi de composition des applications n'est pas commutative. Par exemple : si on reprend les exemples ci-dessus, alors on a pas $f \circ g = g \circ f$.

Proposition 4.15.

1. *Soit $f : E \to F$ une application. On a : $f \circ Id_E = Id_F \circ f = f$.*
2. *Soit E, F, G, H des ensembles. Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ des applications. On a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (la loi de composition des applications est associative).*

Démonstration. On a : comme $Id_E : E \to E$ et $Id_F : F \to F$ alors $f : E \to F$, $f \circ Id_E : E \to F$, $Id_F \circ f : E \to F$.
De plus, pour tout $x \in E$, $f(x) = Id_F(f(x)) = f(Id_E(x))$.
Pour le deuxième point, on constate que $h \circ (g \circ f) : E \to H$ car $g \circ f : E \to G$ et $(h \circ g) \circ f : E \to H$ car $h \circ g : F \circ H$.
De plus, pour tout $x \in E$, $h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g) \circ f(x)$, d'où le résultat. □

4.4 Bijection réciproque

Définition 4.16. Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors, pour tout élément $y \in F$, il existe un et un seul antécédent x dans E par f (tel que $y = f(x)$). On peut donc définir une application de F vers E qui, à tout élément y de F associe son unique antécédent par f. Cette application s'appelle bijection réciproque de f et est notée f^{-1}.

Exemple 4.17.

1. Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x-1 \end{pmatrix}$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.
2. Soit $f : \begin{pmatrix}]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix}$. Même question.
3. Soit $f : \begin{pmatrix} [0,+\infty[& \to & I \\ x & \mapsto & 3\sqrt{x}-1 \end{pmatrix}$. Déterminer I pour que f soit bijective puis déterminer la bijection réciproque.
   Comme f doit être bien définie et que si $x \geqslant 0$ alors $3\sqrt{x} - 1 \geqslant -1$ alors I doit contenir au moins $[-1,+\infty[$.
   Soit $y \in [-1;+\infty[$ alors $f(x) = y \Leftrightarrow 3\sqrt{x} - 1 = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{y+1}{3} \Leftrightarrow x = (\dfrac{y+1}{3})^2$ (le dernier équivalent est vraie car $x \geqslant 0$, $\dfrac{y+1}{3} \geqslant 0$ donc tous les termes sont positives)
   Ainsi $f : \begin{pmatrix} [0,+\infty[& \to & [-1;+\infty[\\ x & \mapsto & 3\sqrt{x}-1 \end{pmatrix}$ est bijective et $f : \begin{pmatrix} [-1,+\infty[& \to & [0;+\infty[\\ y & \mapsto & (\dfrac{y+1}{3})^2 \end{pmatrix}$

Proposition 4.18. *Soit $f : E \to F$ une application bijective.*

1. *$f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$*
2. *f^{-1} est elle même bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Remarque 4.19. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$(f^{-1})^{-1} = f$