Chapitre 27 : Probabilités générales

1 Tribu ou σ-Algèbre

1.1 Définition

Définition 1.1. Soit Ω un ensemble. On appelle **tribu** ou **σ-algèbre des évènements**, tout ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω tel que :
- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $\forall A \in \mathcal{A}, \overline{A} \in \mathcal{A}$ (stabilité par complémentaire).
- Pour toute suite $(A_i)_{i\in I}$ de parties de $\mathcal{A}$, indexée sur une partie non vide de $\mathbb{N}$, la réunion $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ appartient à $\mathcal{A}$ (stabilité par union au plus dénombrable).

Tout élément de la tribu $\mathcal{A}$ est appelé un **événement** de Ω.
Si $\mathcal{A}$ est une tribu de Ω, alors $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé **espace probabilisable**.

Exemple 1.2.
- La tribu la plus simple est $\{\Omega, \emptyset\}$, on l'appelle la tribu grossière.
- L'ensemble de toutes les parties de Ω est une tribu, c'est $\mathcal{P}(\Omega)$.
- Soit A une partie de Ω différente de Ω et de $\emptyset$, alors $\{\Omega, \emptyset, A, \overline{A}\}$ est une tribu.

Remarque 1.3. La notion de tribu est hors programme, seul est au programme les propriétés de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ .... qui sont celles d'une tribu.

Définition 1.4. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Alors
- $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2, A \cap B \in \mathcal{A}$ et $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
- Pour toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Démonstration. Comme $\Omega \in \mathcal{A}$, alors $\bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{A}$.
Soit $A, B \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{A}$ et donc $\bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{A}$ et $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \in \mathcal{A}$.
De plus, $A \setminus B = A \cap \bar{B} \in \mathcal{A}$ car $A, \bar{B} \in \mathcal{A}$.
Soit une famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} \bar{A}_i}$ donc $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A} \in \mathcal{A}$. □

1.2 Système complet d'événements

Définition 1.5. Soit I une partie de $\mathbb{N}$. On appelle **système complet d'évènements** toute famille $(A_i)_{i\in I}$ finie ou dénombrable d'évènements telle que :
- $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

2 Espace probabilisé

2.1 Définitions

Proposition 2.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.*
On appelle ***probabilité*** *sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

- $P(\Omega) = 1$.
- *Pour toute suite $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements deux à deux incompatibles, indexée sur une partie I non vide de $\mathbb{N}$, on a* $P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i)$
  (c'est la propriété de σ-additivité, où σ est un symbole qui représente la notion "au plus dénombrable").

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *est alors appelé* **espace probabilisé** *et pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ est la probabilité l'événement A.*

Remarque 2.2. Lorsque $I = \mathbb{N}$, la propriété de σ-additivité s'écrit : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ et cela a bien un sens, puisque pour tout entier N on a $\sum_{n=0}^{N} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \leq 1$. La série $\sum P(A_n)$ étant à termes positifs, et la suite des sommes partielles majorée par 1, elle est convergente.

2.2 Propriétés déjà vues d'une probabilité

Proposition 2.3. *: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on a :*

1. *Pour tout évènement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.*
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. *Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{i\in I} P(A_i) = 1$.*
4. *Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.*
5. $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2$, $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
6. $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2.3 Une nouvelle propriété : propriété de limite monotone

Définition 2.4.

- On dit que l'évènement A implique B si la réalisation de A entraîne celle de B, c'est à dire si $A \subset B$.
- On dit qu'une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$. Cela signifie que si A_n est réalisé, alors A_{n+1} est réalisé.
- On dit qu'une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$.

Théorème 2.5. *(de la limite monotone)(admis)*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite <u>croissante</u> d'évènements , alors $\boxed{P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)}$.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite <u>décroissante</u> d'évènements , alors $\boxed{P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)}$.

Démonstration. Soit $(A_n)_n$ une suite croissante d'événements. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ et donc $P(A_n) \leqslant P(A_{n+1})$ ainsi la suite $(P(A_n))$ est une suite croissante majorée par 1 et donc converge.
On pose la suite $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $B_0 = A_0$.
Alors les événements de la suite $(B_n)_n$ sont deux à deux disjoints et $\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$.

Ces résultats, dont la démonstration est laissée au lecteur, se montre facilement : le premier par l'absurde (soit $j \neq k$ et $w \in B_k \cap B_j$ alors ....) et le second par double inclusion.

Ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}$, $P(\bigcup_{k=0}^{N} B_k) = \sum_{k=0}^{N} P(B_k) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} P(A_k) - P(A_k \setminus A_{k-1}) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} P(A_k) - P(A_{k-1}) = P(A_N)$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$.

De même, pour le second point. $\square$

Remarque 2.6. La croissance (au sens de l'inclusion) de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique la croissance de la suite de réels $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$, qui est une suite à valeurs dans $[0,1]$, donc majorée, donc convergente (ce qui justifie que $\lim_{n\to+\infty} P(A_n)$ existe).

Corollaire 2.7. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements quelconque, alors*

$$\boxed{P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)} \ \textit{et} \ \boxed{P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)}$$

Démonstration. Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements. Alors la suite d'événements $(\bigcup_{n=0}^{N} A_n)_N$ est une suite croissante d'événements car pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=0}^{N} A_n \subset \bigcup_{n=0}^{N+1} A_n$.

Ainsi par le th. précédent, $P\left(\bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)$

Mais de plus, $\bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{N} A_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, ce que l'on montre par double inclusion :

Soit $w \in \bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{N} A_n$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $w \in \bigcup_{n=0}^{N} A_n$ et donc il existe $n \in [[0,N]]$ tel que $w \in A_n$. Ainsi $w \in \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$.

D'où, $\bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{N} A_n \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$.

Soit $w \in \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $w \in A_k$ et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ ($N = k$ par exemple) tel que $w \in \bigcup_{n=0}^{N} A_n$. Ainsi $w \in \bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{N} A_n$. D'où, $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{N} A_n$.

De même pour l'intersection, en utilisant la décroissance de la suite $(\bigcap_{n=0}^{N} A_n)_N$ $\square$

Exemple 2.8. On lance un dé aux 6 faces équiprobables jusqu'à ce que l'on obtienne un 5 (si cela arrive au bout d'un nombre fini de lancers). Si un 5 n'apparaît jamais, on considère que l'expérience se poursuit indéfiniment.

Cherchons l'univers des possibilités :

- Première possibilité : la face 5 n'apparaît jamais, c'est à dire que l'on a une suite illimitée d'autres chiffres. On note cet évènement A_0.

- Autres possibilités : un 5 apparaît au bout d'un nombre fini de lancers. On notera A_n l'évènement "un 5 apparaît pour la première fois au n-ième lancer" (pour $n \geq 1$).

Calculer la probabilité de l'événement A_0.

Ainsi $P(A_0) = 1 - P(\bar{A_0}) = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$ (car les A_n sont deux à deux disjoints).

De plus, pour tout $n \geqslant 1$, $P(A_n) = P(B_0 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap \bar{B_n}) = P(B_0) \times \ldots \times P(B_{n-1}) \times P(\bar{B_n}) = (\frac{5}{6})^{n-1} \times \frac{1}{6}$ (nous utilisons ici l'indépendance des événements B_i définies pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ par B_i : "le lancer numéro i ne donne pas un 5".

Ainsi $P(A_0) = 1 - \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{5}{6})^{n-1} = 1 - \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{5}{6})^{n} = 1 - \frac{1}{5}\frac{5}{6}\frac{1}{1-5/6} = 0$.

On pouvait aussi remarquer que $P(A_0) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n)$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C_n : "les n premiers lancers ne donne pas de 5".

On remarque que la suite $(C_n)_n$ est décroissante et donc $P(A_0) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = \lim_{n\to+\infty} (\frac{5}{6})^n = 0$ ($P(C_n)$ se calcule de la même manière que $P(A_n)$)

L'exemple précédent illustre le fait qu'un évènement peut être possible (c'est-à-dire $\neq \emptyset$) et avoir une probabilité nulle.

Définition 2.9.
— Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Un évènement A est dit **quasi-impossible** ou **négligeable** si $P(A) = 0$, et **quasi-certain** si $P(A) = 1$.
— Soit P une propriété. Si $A = \{\omega \in \Omega | \omega \text{ vérifie la propriété } P\}$ est tel que $P(A) = 1$, on dit que la propriété P est presque sûrement vraie.

On dira par exemple que si on lance un dé à 6 faces jusqu'à obtenir un 5, on effectuera presque sûrement un nombre fini de lancers.

3 Indépendance et conditionnement

Tous les résultats de probabilités conditionnelles vus dans le cas d'un univers fini sont valables dans le cas général :

Définition 3.1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit B un évènement de probabilité non nulle. Pour tout évènement A, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, et on note $P_B(A)$ le nombre $\boxed{P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}}$.

On montre que l'application $A \in \mathcal{A} \mapsto P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \in [0,1]$ définit une nouvelle probabilité P_B sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Proposition 3.2.
— *Formule des probabilités composées :*
Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements d'un espace probabilisé tel que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
Alors

$$\boxed{P\big(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n\big) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)}$$

— *Formule des probabilités totales :*
Soit I une partie de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements d'un espace probabilisé, tel que $\forall i \in I, P(A_i) \neq 0$. Alors, pour tout évènement B, on a $\boxed{P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i) = \sum_{i\in I} P_{A_i}(B)P(A_i)}$.

Sur la notion d'indépendance, rappelons que :

Définition 3.3. Deux évènements A et B d'un espace probabilisé sont indépendants pour la probabilité P si $\boxed{P(A\cap B) = P(A) \times P(B)}$.

Proposition 3.4. *Lorsque $P(A) \neq 0$, les évènements A et B sont indépendants si et seulement si* $\boxed{P_A(B) = P(B)}$.

La définition suivante va généraliser la définition déjà vue de l'indépendance mutuelle de n événements :

Définition 3.5. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, avec I une partie de $\mathbb{N}$.
On dit que ces évènements sont **mutuellement indépendants** pour la probabilité P si pour toute partie J finie incluse dans I, $P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

Proposition 3.6. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements mutuellement indépendants, alors la famille $(A'_i)_{i\in I}$ où A'_i désigne A_i ou $\overline{A_i}$ est également une famille d'évènements mutuellement indépendants.*

Remarque 3.7. En pratique, on démontre très rarement que des événements sont mutuellement indépendants. On considère que des événements sont mutuellement indépendants lorsque les conditions de l'expérience le justifient et on en déduit les valeurs de certaines probabilités d'intersection. Cela arrive en particulier lors de lancers successifs d'un dé ou d'une pièce, ou lors de tirages avec remise dans une urne.