Exercice 1 :

1. Utilisant que $|\sin(x)| \leq 1$ et $|\cos(x)| \leq 1$, on obtient

$$|u_n| \leq \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Par le théorème d'encadrement des limites, (u_n) converge vers 0.

2. On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme dominant :

$$u_n = \frac{2n\left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right)}{5n\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{5n}\right)} = \frac{2}{5} \times \frac{1+\frac{(-1)^n}{2n}}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{5n}}.$$

Or, $1+\frac{(-1)^{n+1}}{5n}$ et $1+\frac{(-1)^n}{2n}$ tendent vers 1. On en déduit que (u_n) converge vers $2/5$.

3. On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme dominant :

$$u_n = \frac{n^3(1+5/n^2)}{4n^2\left(1+\frac{\sin(n)}{4n^2}+\frac{\ln(n)}{4n^2}\right)} = \frac{n}{4} \times \frac{1+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{\sin(n)}{4n^2}+\frac{\ln n}{4n^2}}.$$

Or, $1+\frac{5}{n^2}$ et $1+\frac{\sin(n)}{4n^2}+\frac{\ln n}{4n^2}$ tendent tous les deux vers 1 (pour le deuxième terme, procéder comme à la première question pour $\frac{\sin(n)}{4n^2}$ et utiliser la croissance comparée du logarithme et des polynômes). Ainsi, (u_n) tend vers $+\infty$.

4. Multipliant au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, on trouve :

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}.$$

Ainsi, (u_n) tend vers 0.

5. Il suffit d'écrire $3^n e^{-3n} = \left(\frac{3}{e^3}\right)^n$ et puisque $0 < \frac{3}{e^3} < 1$, on en déduit que la suite $(3^n e^{-3n})$ tend vers 0.

Exercice 2 :

1. D'après les propriétés de la fonction logarithme, on sait que

$$\ln(n!) = \ln(1)+\ldots+\ln(n) \leq n\ln n.$$

On en déduit, pour $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{\ln(n!)}{n^2} \leq \frac{\ln n}{n}.$$

Par comparaison de la fonction logarithme et des fonctions polynômes, et par le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite $(\ln(n!)/n^2)$ tend vers 0.

2. On factorise par e^n dans le logarithme. On obtient

$$\begin{aligned} u_n &= e^{-\sqrt{n}} \ln\left(e^n(1+e^{-n}+ne^{-n})\right) \\ &= e^{-\sqrt{n}} n + e^{-\sqrt{n}} \ln(1+e^{-n}+ne^{-n}) \\ &= e^{-\sqrt{n}+\ln n} + e^{-\sqrt{n}} \ln(1+e^{-n}+ne^{-n}). \end{aligned}$$

On va maintenant composer les limites... Par comparaison des fonctions logarithmes et puissances au voisinage de l'infini, on sait que $1+e^{-n}+ne^{-n}$ tend vers 1. Donc $\ln(1+e^{-n}+ne^{-n})$ tend vers 0. De même, $-\sqrt{n}$ tend vers $-\infty$ et donc $e^{-\sqrt{n}}$ tend vers 0. Enfin, on sait aussi que $-\sqrt{n}+\ln n$ tend vers $-\infty$ et donc $e^{-\sqrt{n}+\ln n}$ tend vers 0. On en déduit que la suite (u_n) converge vers 0.

3. On utilise des propriétés fonctionnelles du logarithme, puis on factorise par $\sqrt{n}$ dans le logarithme. Il vient

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\ln(\sqrt{n}+1) - \sqrt{n}\ln(\sqrt{n}-1) \\ &= \sqrt{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\ln(\sqrt{n})\right) - \sqrt{n}\left(\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\ln(\sqrt{n})\right) \\ &= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{-\frac{1}{\sqrt{n}}}. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque $\frac{\ln(1+x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0 (dérivée de la fonction logarithme!), on en déduit que (u_n) converge vers 2.

Exercice 3 :

1. On commence par calculer v_n :

$$v_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n}.$$

Il est alors clair que (v_n) tend vers $1/2$.

2. Puisque $3/4 > 1/2$ et puisque (v_n) tend vers $1/2$, la définition de la convergence entraîne immédiatement cette propriété. Plus formellement, pour $\varepsilon = 1/4$, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{2} - \varepsilon \leq v_n \leq \frac{1}{2} + \varepsilon \implies v_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

3. Notons, pour $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété

$$" u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0}."$$

On va démontrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n \geq n_0$. Il faut faire attention à l'initialisation qui se fait uniquement au rang n_0.
Initialisation : On a

$$u_{n_0} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n_0-n_0} u_{n_0}$$

et donc la propriété est vraie au rang n_0.
Hérédité : Soit $n \geq n_0$ telle que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors on a

$$u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1-n_0} u_{n_0}.$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

4. On sait aussi que $u_n \geq 0$, et donc pour tout $n \geq n_0$, on a

$$0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Or, $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0}$ tend vers 0. Par le théorème des gendarmes, (u_n) tend vers 0.

Exercice 4 :

1. On va démontrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\ln(n!) \geq \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right).$$

Pour cela, on distingue les cas n pairs et n impairs. Si $n = 2p$, on écrit

$$\ln(n!) = \ln(1) + \cdots + \ln(2p) \geq \ln(p+1) + \cdots + \ln(2p) \geq p \ln(p+1) \geq \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right).$$

Si $n = 2p+1$, on écrit

$$\ln(n!) = \ln(1) + \cdots + \ln(2p+1) \geq \ln(p+1) + \cdots + \ln(2p+1) \geq (p+1) \ln(p+1) \geq \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right).$$

On en déduit que

$$\frac{\ln(n!)}{n} \geq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right)$$

et donc la suite $(\ln(n!)/n)$ tend vers $+\infty$.

2. On sait que $nx-1\leq\lfloor nx\rfloor\leq nx$ et donc

$$\frac{x}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^\alpha}\leq u_n\leq\frac{x}{n^{\alpha-1}}.$$

On distingue alors plusieurs cas. D'abord, si $x=0$, la suite (u_n) est identiquement nulle, et donc elle est convergente. Ensuite, si $x\neq 0$, et si $\alpha>1$, alors $\frac{x}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^\alpha}$ et $\frac{x}{n^{\alpha-1}}$ tendent vers 0. Par le théorème d'encadrement, il en est de même de (u_n). Si $\alpha=1$, alors par le même théorème, (u_n) tend vers x. Enfin, si $\alpha<1$ et $x>0$, alors $\frac{x}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^\alpha}$ tend vers $+\infty$, et il en est de même de (u_n); si $\alpha<1$ et $x<0$, on utilise que $\frac{x}{n^{\alpha-1}}$ tend vers $-\infty$ pour conclure que (u_n) tend vers $-\infty$.

3. L'idée ici est que la suite $n!$ tend extrêmement vite vers $+\infty$, et que les termes $k!/n!$ avec $k<n$ sont tous très petits. On peut formaliser ceci en remarquant d'une part que $u_n\geq 1$, et que d'autre part

$$\begin{aligned}u_n&\leq 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k!}{n!}\\&\leq 1+\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k!}{n!}\\&\leq 1+\frac{1}{n}+(n-2)\times\frac{1}{n(n-1)}\\&\leq 1+\frac{2}{n}.\end{aligned}$$

Par le théorème d'encadrement des limites, la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 5 :

1. Posons $f(x)=x-\ln(1+x)$. On a $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}\geq 0$ pour $x\geq 0$. La fonction f est donc croissante sur $[0,+\infty[$. En particulier, on a $f(x)\geq f(0)=0$, ce qui donne la première inégalité $\ln(1+x)\leq x$. De même, on pose $g(x)=(x-x^2/2)-\ln(1+x)$. g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a $g'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=\frac{-x^2}{1+x}\leq 0$ pour $x\geq 0$. La fonction g est donc décroissante sur $[0,+\infty[$ et on a $g(x)\leq g(0)=0$ pour $x\geq 0$, ce qui donne l'autre inégalité $x-x^2/2\leq\ln(1+x)$.

2. On a, puisque $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$,

$$v_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\dots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

On utilise ensuite l'inégalité $\ln(1+x)\leq x$ pour trouver

$$\begin{aligned}v_n&\leq\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n}{n^2}\\&\leq\frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n)\\&\leq\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}\\&\leq\frac{n+1}{2n}\end{aligned}$$

où on a utilisé $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour l'autre inégalité, on procède de façon identique en utilisant cette fois $\ln(1+x) \geq x - x^2/2$. On trouve

$$v_n \geq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} - \left(\frac{1^2}{2n^4} + \frac{2^2}{2n^4} + \cdots + \frac{n^2}{2n^4}\right)$$

La première partie a déjà été calculée auparavant. Pour la seconde, on utilise le rappel de l'énoncé.

$$\begin{aligned} v_n &\geq \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\ &\geq \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\geq \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}. \end{aligned}$$

3. On sait que $(n+1)/(2n) \to 1/2$ tandis que $(n+1)(2n+1)/(12n^3) \to 0$ (quotient d'un polynôme de degré 2 et d'un polynôme de degré 3). (v_n) est donc encadré par deux suites qui tendent toutes deux vers $1/2$. Par le théorème d'encadrement des limites (ou théorème des gendarmes), (v_n) converge elle-même vers $1/2$.

4. On a $u_n = \exp(v_n)$. Par le théorème de composition des limites, (u_n) est convergente, de limite $\exp(1/2)$.

Exercice 6 :

1. Il est clair que (u_n) est croissante puisque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et que $v_n - u_n \to 0$. La seule difficulté est de prouver que (v_n) est décroissante. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

2. Là encore, il suffit d'appliquer la définition, même si c'est plus difficile techniquement. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{1+(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)+(n+1)} + \frac{1}{n+(n+1)} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\ u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0. \end{aligned}$$

De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} \leq 0$$

et enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}$$

qui tend bien vers 0.

Exercice 7 :

1. On a $u_1 = \frac{2a+b}{3}$ et $v_1 = \frac{a+2b}{3}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$" \, u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \, ".$$

On va prouver par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.
Initialisation : Puisque $a \leq b$, on a

$$u_1 = \frac{2a+b}{3} \geq \frac{2a+a}{3} = a = u_0 \text{ et } v_1 = \frac{a+2b}{3} \leq \frac{b+2b}{3} = v_0.$$

De plus, $2a+b \leq a+2b$ et donc $u_1 \leq v_1$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors on a

$$u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}+v_{n+1}}{3} \geq \frac{2u_{n+1}+u_{n+1}}{3} = u_{n+1} \text{ et } v_{n+2} = \frac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3} \leq \frac{v_{n+1}+2v_{n+1}}{3} = v_{n+1}.$$

De plus, on a $2u_{n+1}+v_{n+1} \leq u_{n+1}+2v_{n+1}$ et donc $u_{n+2} \leq v_{n+2}$. Ainsi, on a prouvé que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout entier n.
3. On a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2v_n+u_n}{3} - \frac{2u_n+v_n}{3} = \frac{1}{3}(v_n - u_n).$$

La suite $(v_n - u_n)$ est donc une suite géométrique de raison $1/3$ et on a, pour tout $n \geq 0$, $v_n - u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (b_a)$. Puisque $0 < 1/3 < 1$, la suite $(v_n - u_n)$ tend vers 0.
4. D'après le résultat des deux questions précédentes, les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite.
5. On a

$$v_{n+1} + u_{n+1} = \frac{2v_n+u_n}{3} + \frac{2u_n+v_n}{3} = v_n + u_n.$$

La suite $(u_n + v_n)$ est donc constante et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n + u_n = a + b$.
6. Notons ℓ la limite commune de (u_n) et (v_n). Alors $(u_n + v_n)$ tend vers 2ℓ. D'autre part, on a pour tout $n \geq 0$, $u_n + v_n = a + b$. On en déduit $2\ell = a + b$, soit $\ell = (a+b)/2$.

Exercice 8 :

On va montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. En effet, on a

$$u_p - u_{p-2} = (-1)^p \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}\right) = \frac{(-1)^{p+1}}{p(p+1)}.$$

Ainsi, $u_{2n} - u_{2n-2} \leq 0$ et $u_{2n+1} - u_{2n-1} \geq 0$. La suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante. De plus, on a

$$u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{-1}{2n+2}$$

ce qui entraine que $u_{2n+1} - u_{2n} \to 0$. Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc adjacentes : elles convergent vers la même limite l. Il en est de même de (u_n).

Exercice 9 :

1. La fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$. Sa dérivée vérifie

$$f'(x)=\frac{6}{(x+1)^2}>0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Remarquons aussi que $f(1)=1$.

2. L'intervalle $]1,+\infty[$ est stable par f, c'est-à-dire que $f(]1,+\infty[)\subset]1,+\infty[$. Puisque $u_0=3$ est élément de $]1,+\infty[$, on en déduit que u_n est élément de $]1,+\infty[$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3. On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1}&=\frac{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-2}{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-1}\\
&=\frac{4u_n-2-2u_n-2}{4u_n-2-u_n-1}\\
&=\frac{2u_n-4}{3u_n-2}\\
&=\frac{2}{3}\left(\frac{u_n-2}{u_n-1}\right)\\
&=\frac{2}{3}v_n.
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$v_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n v_0=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\frac{u_n-2}{u_n-1}=v_n &\iff u_n-2=u_nv_n-v_n\\
&\iff u_n(1-v_n)=2-v_n\\
&\iff u_n=\frac{2-v_n}{1-v_n}
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$u_n=\frac{2-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

Puisque $(2/3)^n$ tend vers 0, on conclut que (u_n) converge vers 2.

Exercice 10 :

1. Soit $n \geq 0$ un entier naturel. On définit la proposition de récurrence

$$H(n): \text{" on a } 0 < u_n \leq 1\text{"}.$$

La proposition $H(0)$ est vraie car, par hypothèse, on a $u_0 \in]0, 1]$. Soit $n \geq 0$ un entier. On suppose que $H(n)$ est vraie. Alors, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

par hypothèse de récurrence $H(n)$. Ainsi, on a $0 < u_{n+1} \leq 1$ et $H(n+1)$ est vérifiée. On a donc montré que $H(0)$ est vraie et que pour tout entier $n \geq 0$, si $H(n)$ est vraie, alors $H(n+1)$ l'est aussi. Par récurrence, on en déduit que pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n \in]0, 1]$.

2. Soit n un entier naturel. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{4} - \frac{u_n}{2} = \frac{u_n}{4}(u_n - 2)$$

Or, d'après la question précédente, on a $u_n > 0$ et $u_n - 2 \leq -1 < 0$. Ainsi, on a $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc (strictement) décroissante.

3. D'après ce qui précède, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée (par exemple par 0). Par un résultat de cours, elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite : c'est un élément de $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{où } f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}.$$

La fonction f est continue, donc par passage à la limite $n \to +\infty$ dans l'égalité précédente, il vient

$$\ell = f(\ell) \text{ c'est-à-dire } \ell = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell^2}{4}.$$

Les solutions de cette équation du second degré sont $\ell = 0$ et $\ell = 2$. Puisqu'on savait déjà que $\ell \in [0, 1]$, on conclut $\ell = 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Exercice 11 :

1. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : "$u_n \geq 1$".
Initialisation : on a bien $u_0 \geq 1$ et donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_n \geq 1$. On a alors, puisque la fonction logarithme est croissante, $\ln(u_n) \geq \ln(1) = 0$, puis
$u_{n+1} = 1 + \ln(u_n) \geq 1 + 0 = 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.
2. Posons $g(x) = f(x) - x = 1 + \ln(x) - x$. La fonction g est dérivable sur $[1, +\infty[$, et sa dérivée est donnée par $g'(x) = \frac{1}{x} - 1$. Pour $x \geq 1$, on a $\frac{1}{x} \leq 1$ et donc $g'(x) \leq 0$, et même on a $g'(x) < 0$ pour $x > 1$. Ainsi, g est strictement décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
Puisque $g(1) = 1 + \ln(1) - 1 = 0$, on en déduit que $g(x) < 0$ pour tout $x > 1$. Ainsi, on a $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 1$, et même $f(x) < x$ pour tout $x > 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, puisque $u_n \geq 1$, on a d'après la question précédente
$u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$: la suite (u_n) est décroissante.
4. La suite est décroissante et minorée par 1. Elle est donc convergente. Soit ℓ sa limite.
Alors ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$ et de plus $\ell \geq 1$ puisque $u_n \geq 1$ pour tout n. Or, on sait que $x < f(x)$ pour $x > 1$. On en déduit que $\ell = 1$: la suite converge vers 1.

Exercice 12 :

1. Puisque $x \mapsto 2/x$ est décroissante, la fonction f est décroissante sur $[1, 3]$. De plus, $f(1) = 3$ et $f(3) = 5/3 > 1$. L'intervalle $[1, 3]$ est bien stable par f, ce qui entraîne en particulier que la suite (u_n) est bien définie et que $u_n \in [1, 3]$ pour tout entier n.
2. Puisque $v_{n+1} = u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$, on pose $g = f \circ f$ qui laisse bien sûr stable l'intervalle $[1, 3]$. Puisque la composée de deux fonctions décroissantes est une fonction croissante, g est croissante sur $[1, 3]$. De plus, on a

$$u_1 = 3, \quad u_2 = 5/3 > u_0$$

et donc $v_1 \geq v_0$. On prouve alors par récurrence sur n que la suite (v_n) est croissante, ie que pour tout n on a $v_{n+1} \geq v_n$. C'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai au rang n, il suffit d'utiliser la croissance de g sur $[1, 3]$ pour démontrer que

$$1 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 3 \implies v_{n+1} = g(v_n) \leq g(v_{n+1}) = v_{n+2}.$$

3. Remarquons ensuite que $w_n = f(v_n)$. Ainsi, de la décroissance de f sur $[1, 3]$ et de l'inégalité $v_n \leq v_{n+1}$, on déduit l'inégalité

$$w_n = f(v_n) \geq f(v_{n+1}) = w_{n+1}.$$

Autrement dit, (w_n) est décroissante.
4. Puisque (v_n) est croissante et majorée et que (w_n) est décroissante et minorée, on en déduit que ces deux suites sont convergentes. Leur limite respective est un élément de $[1, 3]$ vérifiant l'équation $g(x) = x$. Or,

$$g(x) = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{3x + 2}{x + 2}.$$

L'équation $g(x) = x$ est donc équivalente à

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -1.$$

La seule solution dans $[1, 3]$ est 2, donc les deux suites convergent vers la même limite, à savoir 2.

5. Puisque (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers 2, on en déduit que (u_n) est elle aussi convergente vers 2.

Exercice 13 :

1. On vérifie facilement que f est décroissante sur $[0,1]$. Puisque $f(1)=0$ et que $f(0)=1$, on a $f([0,1])=[0,1]$ et $[0,1]$ est un intervalle stable par f.
2. On commence par remarquer que $[0,1]$ est lui aussi stable par f. La composée de deux fonctions décroissantes étant une fonction croissante, g est croissante.
3. On commence par calculer g : pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$g(x)=(1-(1-x)^2)^2=x^4-4x^3+4x^2.$$

L'équation $g(x)=x$ est donc équivalente à

$$x^4-4x^3+4x^2-x=0.$$

0 et 1 sont des solutions évidentes de cette équation. On peut donc factoriser par $x(x-1)$ et on trouve

$$x(x-1)(x^2-3x+1)=0.$$

En calculant le discriminant de x^2-3x+1, on trouve que l'équation $g(x)=x$ admet 4 solutions qui sont

$$x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}>1,\ x_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\simeq 0{,}38.$$

4. Puisque g est croissante, la suite (v_n) est monotone. De plus, on a $v_1=g(v_0)=9/16>1/2$. La suite (v_n) est croissante. Elle est majorée par 1. Elle est donc convergente, et sa limite ℓ appartient à $\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$ et à $[1/2,1]$. La seule possibilité est $\ell=1$ et donc (v_n) converge vers 1. Puisque $w_n=f(v_n)$ la suite (w_n) converge vers $f(1)=0$.
5. Les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers deux limites différentes : la suite (u_n) diverge.

Exercice 14 :

1. On a

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

On encadre $\sqrt{5}$ entre 2 et 3 (strictement), et on en déduit que

$$1 < \frac{1+2}{2} < \phi < \frac{1+3}{2} = 2.$$

2. On a $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
3. Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: " $1 \leq u_n \leq \phi$ ". $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $1 = u_0 \leq \phi$. Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vrai, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Alors, puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est croissante,

$$1 \leq \sqrt{1+1} \leq \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{1+\phi} = \phi.$$

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et, par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

4. On remarque que $u_1 \leq u_2$. Puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est croissante, on en déduit facilement (par exemple, par récurrence) que la suite (u_n) est croissante.
5. (u_n) est une suite croissante, majorée : elle converge vers une limite ℓ qui est solution de $\ell = \sqrt{l+1}$. En particulier, $\ell^2 = l+1$. De plus, $\ell \geq 1 > 0$. Par définition du nombre d'or, $\ell = \phi$.
6. On a, d'après la relation de récurrence, et en utilisant la quantité conjuguée,

$$u_{n+1} - \phi = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi} = \frac{(1+u_n)-(1+\phi)}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+\phi}}.$$

Maintenant,

$$\sqrt{1+u_n} \geq 1,\ \sqrt{1+\phi} \geq 1 \implies \sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi} \geq 2,$$

ce qui donne le résultat.
7. Le résultat de la question précédente incite à faire une démonstration par récurrence. La seule difficulté est alors de vérifier le cas $n = 1$. Mais l'encadrement $1 < \phi < 2$ donne $|u_1 - \phi| \leq 1$.

Exercice 15 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "$x_n > 0$ et $y_n > 0$". Démontrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $x_0 = y_0 > 1$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors $x_{n+1} = x_n + 2y_n > 0$ et $y_{n+1} = x_n + y_n > 0$ puisque la somme de deux réels strictement positifs est strictement positive. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

2. Le résultat est vraie pour $n = 0$. Pour $n \geq 1$, on écrit

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n-1} + 2y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}}.$$

Comme $x_{n-1} + 2y_{n-1} \geq x_{n-1} + y_{n-1}$ et que $x_{n-1} + y_{n-1}$ est strictement positif, on en déduit que

$$\frac{x_{n-1} + 2y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}} \geq 1.$$

3. En vertu de la formule de récurrence, on commence par écrire

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \sqrt{2} = \frac{x_n + 2y_n}{x_n + y_n} - \sqrt{2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}-1}{\frac{x_n}{y_n}+1}\left(\sqrt{2} - \frac{x_n}{y_n}\right) &= \frac{\sqrt{2}-1}{x_n + y_n}(\sqrt{2}y_n - x_n) \\
&= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)y_n - (\sqrt{2}-1)x_n}{x_n + y_n} \\
&= \frac{2y_n - \sqrt{2}y_n - \sqrt{2}x_n + x_n}{x_n + y_n} \\
&= \frac{x_n + 2y_n}{x_n + y_n} - \sqrt{2}\frac{x_n + y_n}{x_n + y_n} \\
&= \frac{x_n + 2y_n}{x_n + y_n} - \sqrt{2}
\end{aligned}$$

d'où l'égalité recherchée.

4. On prend la valeur absolue de l'inégalité précédente. Il vient

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \sqrt{2}\right| = \frac{|\sqrt{2}-1|}{\left|\frac{x_n}{y_n}+1\right|}\left|\sqrt{2} - \frac{x_n}{y_n}\right|.$$

Mais $|\sqrt{2} - 1| \leq 2 - 1 = 1$ et

$$\left|\frac{x_n}{y_n} + 1\right| \geq \frac{x_n}{y_n} + 1 \geq 2$$

d'où

$$\frac{|\sqrt{2}-1|}{\left|\frac{x_n}{y_n}+1\right|} \leq \frac{1}{2}.$$

Avec l'aide de la question précédente, ceci donne le résultat souhaité.

5. Pour $n \geq 0$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) =\text{"} \left|\frac{x_n}{y_n} - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{2}-1) \text{"}.$$

Initialisation : Puisque $\left|\frac{x_0}{y_0}-\sqrt{2}\right| = |\sqrt{2}-1|$, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors on a

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\sqrt{2}-\frac{x_n}{y_n}\right| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{2}-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (\sqrt{2}-1).$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Par le théorème des gendarmes, la suite (x_n/y_n) converge vers $\sqrt{2}$. De plus, puisque $(\sqrt{2}-1) \leq 1$, on sait que x_n/y_n sera une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près dès que $1/2^n \leq 10^{-10}$, c'est-à-dire dès que $2^n \geq 10^{10}$. On calcule donc les termes successifs de ces deux suites jusqu'à ce que cette condition soit remplie. On obtient la fonction suivante, sous Python.

```
def racinedeux():
    x,y=1,1
    n=0
    while (2**n<10**10):
        x,y=x+2*y,x+y
        n=n+1
    return x/y
```

Si on connait le logarithme, bien sûr, on sait que la condition est remplie dès que $n\ln 2 \geq 10\ln 10$, c'est-à-dire dès que $n \geq 10\ln(10)/\ln(2)$. On peut alors utiliser simplement une boucle "pour", qui évite de faire un test à chaque fois. Il faut faire attention à ce qu'on va jusque l'entier qui suit $10\ln(10)/\ln(2)$. On obtient alors :

```
import math

def racinedeux():
    x,y=1,1
    for n in range(math.floor(10*math.log(10)/math.log(2)+1)):
        x,y=x+2*y,x+y
    return x/y
```

Exercice 16 :

1. La suite (v_n) est décroissante, et minorée par 1. Elle est donc convergente. La suite (u_n) est croissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$. Puisque (v_n) est décroissante, on a en outre $v_n \leq v_0$. Donc (u_n) est croissante et majorée par v_0. Elle est donc convergente.
2. On commence par remarquer que l'inégalité $1 \leq u_n \leq v_n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, donne par passage à la limite $1 \leq \ell \leq \ell'$. Puisque $\ell' \neq 0$, on déduit que la suite (u_n/v_n) converge vers ℓ/ℓ'. Par unicité de la limité, on en déduit que $\ell = \ell'$.
3. La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante. En outre, la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0, puisque (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.