Exercice 1 :

On peut effectuer les produits $AC, AE, BA, CB, CD, DB, DD, EC, EE$. Seules les matrices D et E sont carrées, et seule la matrice D est symétrique.

Exercice 2 :

1. Puisque A et B sont deux matrices carrées de même ordre, les deux produits AB et BA sont possibles. On trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $AB = BA = 0$ alors que ni A ni B ne sont nuls.

2. Le produit AB n'est pas défini car A a trois colonnes et B deux lignes. Pour BA, on trouve

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Le produit BA n'est pas défini. En revanche, on a

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 :

On effectue les divers calculs, et on trouve

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'identité remarquable $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ est fausse pour les matrices. En revanche l'égalité $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, qu'on prouve par double distributivité, est vraie pour toutes les matrices carrées A et B.

Exercice 4 :

Soit $B=\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ une telle matrice. On a :

$$AB=\begin{pmatrix} c+e & d+f \\ e & f \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} c & c+d \\ e & e+f \end{pmatrix}.$$

Puisque $AB=BA$, on obtient le système :

$$\begin{cases} c+e & = & c \\ d+f & = & c+d \\ f & = & e+f \end{cases}$$

On résout ce système pour trouver que $e=0$ et $c=f$. Toutes les matrices B qui conviennent sont celles de la forme :

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 :

1. Notons $C=A^T$, $D=AA^T$ et cherchons quels sont les coefficients diagonaux de D. On a

$$D_{i,i}=\sum_{k=1} a_{i,k}c_{k,i}=\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2.$$

On en déduit que

$$\mathrm{tr}(AA^T)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}^2.$$

On réalise une somme de termes positifs ou nuls, et on demande que la somme est nulle. Tous les termes sont donc nuls et on en déduit que, pour tout $i,k=1,\dots,n$, on a $a_{i,k}=0$, c'est-à-dire $A=0$.

2. Une première preuve utilise la première question. En effet, l'égalité implique que $\mathrm{tr}((A-B)X)=0$ pour tout $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Appliquant ceci avec $X=(A-B)^T$, on peut utiliser le résultat de la première question et en déduire que $A-B=0$.

On peut aussi donner une preuve directe. Calculons d'abord $AE_{i,j}$ où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire avec des 0 partout sauf le coefficient à la i-ème ligne et j-ième colonne qui est égal à 1. Alors,

$$AE_{i,j}=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,i} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

où la seule colonne non-nulle est la j-ième colonne. Le seul coefficient diagonal non nul est donc $a_{j,i}$, et on en déduit que

$$\mathrm{tr}(AE_{i,j}) = \mathrm{tr}(BE_{i,j}) \implies a_{j,i} = b_{j,i}.$$

Comme i et j sont arbitraires dans $\{1, \ldots, n\}$, on en déduit que $A = B$.

Exercice 6 :

On va commencer par calculer les premiers termes de A^n pour essayer de deviner la formule. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On démontre alors par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

La preuve par récurrence est très simple, et repose simplement sur le fait que $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$.
On fait la même chose pour B :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

On démontre alors, par récurrence sur n, que

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 :

1. On vérifie facilement que

$$U^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc que $U^2 = 2U + 3I_4$.
2. On va raisonner par récurrence. Elle n'est pas si simple, et on peut remarquer que ce que l'on nous demande de démontrer est que, pour tout $k \geq 0$, $U^k = \beta_k U + \alpha_k I_4$. Pour $k \geq 0$, notons donc

$$\mathcal{P}(k) = '' \, U^k = \alpha_k I_4 + \beta_k U''.$$

Alors $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée pour tout $k \geq 0$. En effet, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont clairement vérifiées, sachant que $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = 1$. Soit $k \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée et prouvons $\mathcal{P}(k+1)$. On a

$$U^{k+1} = U^k \times U = (\alpha_k I_4 + \beta_k U) \times U = \alpha_k U + \beta_k U^2.$$

Utilisant la reation $U^2 = 3I + 2U$, on en déduit que

$$U^{k+1} = 3\beta_k I_4 + (\alpha_k + 2\beta_k)U = \alpha_{k+1} I_4 + \beta_{k+1} U.$$

La propriété est bien démontrée au rang $k+1$. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout entier k.

3. Il suffit d'écrire

$$\beta_{k+2} = \alpha_{k+1} + 2\beta_{k+1} = 3\beta_k + 2\beta_{k+1}.$$

4. On a affaire à une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Pour déterminer le terme général d'une telle suite, on introduit l'équation caractéristique $r^2 = 2r + 3$, dont les racines sont -1 et 3. On sait alors qu'il existe deux constantes a et b telles que, pour tout $k \geq 0$, on a $\beta_k = a(-1)^k + b3^k$. On détermine a et b en sachant que $\beta_0 = 0$ et $\beta_1 = 1$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 0 &= a + b \\ 1 &= -a + 3b \end{cases}$$

La résolution de ce système donne le résultat souhaité, et on en déduit très aisément l'expression de α_k.

Exercice 8 :

1. On a

$$\begin{aligned}(2I_n + B^{-1})B + A(B - A^{-1} + 2A^{-1}B) - AB &= 2B + I_n + AB - I_n + 2B - AB \\ &= 4B.\end{aligned}$$

2. On a cette fois

$$\begin{aligned}A(7I_n + A^{-1}) - B(5B^{-1}A + B^{-1} + A) + A(B - 2I_n) &= 7A + I_n - 5A - I_n - BA + AB - 2A \\ &= -BA + AB.\end{aligned}$$

Exercice 9 :

On trouve :

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A n'est pas inversible : si tel était le cas, on multiplierait à gauche par A^{-1} dans l'égalité $AB = AC$, et on trouverait $B = C$. Ce n'est pas le cas! Pour la seconde partie, on considère F une matrice vérifiant les propriétés précitées :

$$F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Le calcul de AF donne :

$$AF = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ 3a+d+g & 3b+e+h & 3c+f+i \end{pmatrix}.$$

Puisque $AF = 0$, on a le système suivant :

$$\begin{cases} a = b = c = 0 \\ d+g = e+h = f+i = 0 \\ 3a+d+g = 3b+e+h = 3c+f+i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b = c = 0 \\ d = -g \\ e = -h \\ f = -i \end{cases}$$

Les matrices F recherchées sont donc les matrices de la forme :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ -d & -e & -f \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 :

1. Le calcul ne pose pas de problèmes. Il mène à :

$$\frac{A^2+A}{2} = I_3 \implies A\frac{A+I_3}{2} = \frac{A+I_3}{2}A = I_3.$$

A est inversible, et son inverse est :

$$\frac{A+I_3}{2}.$$

2. Un calcul donne $A^3 - A = 4I_3$. Donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = I_3$, ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On vérifie facilement que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$. On réécrit ceci en :

$$A(A - 3I_3) = -2I_3 \iff A\left(\frac{-1}{2}(A - 3I_3)\right) = I_3.$$

Ainsi, A est inversible et son inverse est $\frac{-1}{2}(A - 3I_3)$.

Exercice 11 :

1. Par la méthode du pivot de Gauss, on prouve facilement que P est inversible et que son inverse est donné par

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Après un petit calcul on trouve

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Par récurrence, ou parce que l'on connait la formule donnait la puissance n-ième d'une matrice diagonale, on trouve

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^n}{2^n} \end{pmatrix}.$$

4. On remarque que $D = P^{-1}AP \iff PDP^{-1} = A$ en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}. Il vient ensuite par récurrence sur n que $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. On a $U_{n+1} = AU_n$ d'où l'on déduit, par une récurrence immédiate, que $U_n = A^nU_0$.

5. On a $U_{n+1} = AU_n$ d'où l'on déduit, par une récurrence immédiate, que $U_n = A^n U_0$.
6. On a par exemple

$$u_n = \left(\frac{-2}{3 \cdot 2^n} + \frac{1}{3}\right) u_0 + \left(\frac{1}{3 \cdot 2^n} + \frac{1}{3}\right) v_0 + \left(\frac{1}{3 \cdot 2^n} + \frac{1}{3}\right) w_0.$$

Puisque la suite (2^n) tend vers $+\infty$, on déduit des règles habituelles concernant les limites de suites que (u_n) converge vers $\frac{u_0+v_0+w_0}{3}$. Il en est de même de (v_n) et (w_n) (par exemple, par symétrie de l'expression de ces suites).