Exercice 1 :

Notons A la proposition "$6|n$" et B la proposition "n est pair". Alors $A \implies B$. En effet, si $6|n$, alors il existe un entier k tels que $n = 6 \times k$ et donc $n = 2 \times (3k)$ est pair. En revanche, la réciproque est fausse. En effet, 4 est pair mais 6 ne divise pas 4. On en déduit que

1. $6|n$ n'est pas une condition nécessaire à ce que n soit pair (4 est un contre-exemple).
2. $6|n$ est une condition suffisante à ce que n soit pair.

Exercice 2 :

Notons P la proposition "Avoir son examen" et Q la proposition "Travailler régulièrement". Nous allons écrire les propositions sous la forme $P \implies Q$ ou $Q \implies P$.

1. La proposition est clairement $Q \implies P$.
2. La proposition est $P \implies Q$.
3. La proposition est $\bar{Q} \implies \bar{P}$. C'est une proposition équivalente à sa contraposée, $P \implies Q$.
4. Même signification que 2., $P \implies Q$.
5. Cette fois, on a $Q \implies P$.
6. La proposition est $\bar{Q} \implies \bar{P}$, qui est équivalente à $P \implies Q$.
7. Cette fois, on a $\bar{P} \implies \bar{Q}$, qui est équivalente à $Q \implies P$.
8. Tout simplement, $Q \implies P$.
9. C'est la même chose que 2, à savoir $P \implies Q$.

Les propositions 1, 5, 7 et 8 sont donc équivalentes, et les proposition 2, 3, 4, 6 et 9 le sont également.

Exercice 3 :

1. Cette propositions est fausse, car 2 ne divise pas 167.
2. Cette proposition est vraie, car 136 est un multiple de 17.
3. Cette proposition est fausse, car x devrait être simultanément égal à -1 et à -2.
4. Cette proposition est vraie car $(\exists x \in \mathbb{R},\ x + 1 = 0)$ est vraie (il suffit de prendre $x = -1$) et de la même façon $(\exists x \in \mathbb{R},\ x + 2 = 0)$ est vraie (il suffit de prendre $x = -2$).
5. Cette proposition est vraie, par exemple car il s'agit de la négation de la proposition 3, qui est fausse.
6. Cette assertion est fausse. Si on considère x n'importe quel réel non nul, alors le choix de $y = 1$ et de $z = 2x$ fait que z est différent de xy.
7. Cette assertion est fausse. Prenons n'importe quel y dans $\mathbb{R}^*$. On voudrait trouver x dans $\mathbb{R}^*$ tel que, pour tout z dans $\mathbb{R}^*$, on ait $z = xy$. Bien sûr, ce n'est pas possible, car le x que l'on choisit devrait convenir à toute valeur de z, ce qui n'est pas possible car il suffit de considérer un z différent de xy.
8. Cette assertion est vraie, car on peut choisir x une fois y et z fixés. On choisit alors $x = z/y$.
9. L'assertion est vraie, il suffit de prendre $a = 0$ (convient pour toute valeur de $\varepsilon > 0$).
10. Cette assertion est "évidemment" vraie car elle est plus faible que la précédente (on peut choisir a après $\varepsilon > 0$).

Exercice 4 :

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
2. $\exists M > 0,\ \forall A > 0,\ \exists x \geq A,\ f(x) \leq M$.
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ et $x > 0$.
4. $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in I^2, |x-y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Exercice 5 :

1. D'après le cours de lycée, l'équation de la tangente au point A de coordonnée $(0,1)$ est $y = 1 + nx$.
2.
3.

3.1. C'est faux, par exemple si $n = 3$ et $x = -4$.
3.2. C'est vrai. Il y a plusieurs façons de démontrer cela. La plus facile est d'étudier la fonction $f(x) = (1+x)^n - (1+nx)$ sur $[0, +\infty[$. On peut aussi utiliser la formule du binôme de Newton.
3.3. C'est vrai : $n = 1$ convient.
3.4. C'est vrai : prendre $x = 0$.
3.5. C'est vrai : prendre $n = 2$, car $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ si $x \neq 0$.

Exercice 6 :

1. On peut l'écrire sous la forme : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C$; une autre écriture possible est $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$.
2. Si on nie l'assertion précédente, on trouve $\forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq C$. Si on nie la seconde, on trouve $\exists x, y \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(y)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$;
4. $\exists T \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$.

Exercice 7 :

1. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $a + b\sqrt{2} = 0$ sans que $a = b = 0$. Alors, nécessairement $b \neq 0$ car si $b = 0$ alors on devrait aussi avoir $a = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $(a,b) \neq (0,0)$. Mais alors, on a $\sqrt{2} = \frac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux. L'hypothèse de départ est donc fausse, et on a $a = b = 0$.
2. D'une part, si $m = p$ et $n = q$, alors $m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}$. Réciproquement, supposons que $m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}$. Alors on a aussi

$$(m-p) + (n-q)\sqrt{2} = 0.$$

Le résultat de la question précédent nous dit que $m - p = 0$ et que $n - q = 0$, soit encore $m = p$ et $n = q$.

Exercice 8 :

Raisonnons par l'absurde. On suppose donc que n est le carré d'un entier, et que $2n$ est lui aussi le carré d'un entier. Alors n s'écrit $n = p^2$ et $2n$ s'écrit $2n = q^2$. Alors, en faisant le quotient, on a $2 = \frac{q^2}{p^2}$ et en prenant la racine carrée, $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$. Or $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a une contradiction!

Exercice 9 :

1. La traduction immédiate de la propriété est :

$$\exists (i,j) \in \{0,\dots,n\},\ (i<j) \text{ et } (x_j - x_i \leq 1/n).$$

Pour utiliser simplement les valeurs $x_i - x_{i-1}$, il suffit de remarquer que si deux nombres sont distants de moins de $1/n$, alors il y aura deux nombres consécutifs qui seront distants de moins de $1/n$. Ceci signifie :

$$\exists i \in \{1,\dots,n\},\ x_i - x_{i-1} \leq 1/n.$$

2. Le contraire de cette assertion est donc :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ x_i - x_{i-1} > 1/n.$$

3. Supposons la propriété de l'exercice fausse, c'est-à-dire que

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ x_i - x_{i-1} > 1/n.$$

En écrivant

$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)$$

on a donc, en utilisant la propriété précédente :

$$x_n - x_0 > n \times \frac{1}{n} = 1.$$

C'est absurde. La propriété initiale est donc vraie.

4. On considère les n intervalles $I_1 = [0, 1/n[$, $I_2 = [1/n, 2/n[$,...,$I_n = [(n-1)/n, 1]$ (qui correspondent si l'on veut à n tiroirs). On veut y placer $(n+1)$ points (les chaussettes!). Il faut obligatoirement qu'il y ait deux points dans le même intervalle. Ces deux points seront distants de moins de $1/n$. Bien sûr, le principe des tiroirs se démontre aussi à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Exercice 10 :

On va démontrer qu'elle est constante en faisant un raisonnement par l'absurde et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires. Supposons en effet qu'il existe $a < b$ dans I tel que $f(a) \neq f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, toute valeur de $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$ si $f(b) < f(a)$) est prise par f dans $[a, b]$. Comme cette intervalle contient un nombre infini de points, on obtient une contradiction. Donc, pour tous $a, b \in I$, on a $f(a) = f(b)$. Autrement dit, f est constante.

Exercice 11 :

On va procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la propriété $\mathcal{P}(n) =$" $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$ ". $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée, puisque $2^0 = 1! = 1^1 = 1$. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On commence par prouver l'inégalité de gauche. On remarque d'abord que, puisque $n \geq 1$, on a $2 \leq n+1$ d'où l'on déduit

$$2^n = 2 \times 2^{n-1} \leq 2 \times n! \leq (n+1) \times n! \leq (n+1)!$$

Pour l'inégalité de droite, on part de l'hypothèse de récurrence et on multiplie par $(n+1)$, pour obtenir

$$(n+1)! \leq (n+1)n^n.$$

Or, $n \leq n+1$ et donc $n^n \leq (n+1)^n$. On en déduit que

$$(n+1)! \leq (n+1) \times (n+1)^n = (n+1)^{n+1}.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée, ce qui prouve, par récurrence, l'inégalité voulue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12 :

1. Soit $n \geq 3$ tel que P_n est vraie. On a alors

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2.$$

Il suffit donc de montrer que $2n^2 \geq (n+1)^2 \iff n^2 - 2n - 1 \geq 0$. On calcule le discriminant de ce dernier polynôme, on fait son tableau de signes et on s'aperçoit qu'il est toujours positif pour $n \geq 3$. Ceci montre bien P_{n+1}.

2. Il faut faire attention, car P_3 est fausse! On ne peut donc pas en déduire que P_n est vraie pour $n \geq 3$. D'ailleurs, P_4 est fausse, mais P_5 est vraie. Par le principe de récurrence, P_n est vraie pour $n \geq 5$. Pour les premières valeurs de n, on constate également que P_0 et P_1 sont vraies.

Exercice 13 :

On va démontrer ce résultat par récurrence. Comme la formule de récurrence porte sur deux termes de la suite, nous allons effectuer une récurrence double. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété " $u_n = 1 + 2^n$ ".

Initialisation : On a $u_0 = 2 = 1 + 2^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. On a aussi $u_1 = 3 = 1 + 2^1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Alors on a

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Puisque $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies, on a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3(1+2^{n+1}) - 2(1+2^n) \\ &= 3 + 3 \cdot 2^{n+1} - 2 - 2 \cdot 2^n \\ &= 1 + 6 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n \\ &= 1 + 4 \cdot 2^n \\ &= 1 + 2^{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

En conclusion, par le principe de récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 14 :

On va procéder par récurrence double. Posons, pour $n \geq 1$, la propriété P_n suivante :

$$P_n : \ 1 \leq a_n \leq n^2 \text{ et } 1 \leq a_{n+1} \leq (n+1)^2.$$

Initialisation : P_1 est vraie. En effet, on a $1 \leq a_1 = 1 \leq 1^2$ et, puisque $a_2 = a_0 + a_1 = 2$, on a aussi $1 \leq a_2 \leq 2^2$.
Hérédité : soit $n \geq 2$ un entier tel que P_n est vraie, et prouvons P_{n+1}. On a déjà $1 \leq a_{n+1} \leq (n+1)^2$. D'autre part, on a

$$a_{n+2} \geq a_{n+1} \geq 1$$

et

$$a_{n+2} \leq (n+1)^2 + \frac{2}{n+2}n^2 = \frac{(n+1)^2(n+2) + 2n^2}{n+2} = \frac{n^3 + 6n^2 + 5n + 2}{n+2}.$$

Mais,

$$(n+2)^2 = \frac{(n+2)^3}{n+2} = \frac{n^3 + 6n^2 + 12n + 8}{n+2} \geq \frac{n^3 + 6n^2 + 5n + 2}{n+2}.$$

On a bien prouvé que P_{n+1} est vraie.
Par récurrence double, P_n est vraie pour tout entier $n \geq 2$. Donc pour tout $n \geq 1$, on a

$$1 \leq a_n \leq n^2.$$

Exercice 15 :

1. Pour $n = 4$, c'est très facile! Pour $n = 6$, on considère un sommet du carré (de côté a). On construit à partir de ce sommet sur chaque côté issu de ce sommet trois carrés de longueur $a/3$. On obtient 5 carrés (un des carrés est commun). La surface restant est un carré, de côté $2a/3$.
   Pour $n = 7$, on part d'un découpage en 4 carrés, puis on coupe l'un des carrés en 4 : on obtient bien 7 carrés. Pour $n = 8$, on procède comme pour $n = 6$,mais en considérant des carrés de côté $a/4$ désormais.
2. Le passage est similaire à celui de 4 carrés à 7 carrés. Parmi les n carrés, on en choisit un que l'on découpe en 4.
3. Pour $n = 2$ et $n = 3$, c'est clair : dès qu'on trace un trait de séparation, on devra tracer au moins un trait perpendiculaire et l'on obtiendra au moins quatre carrés. Pour $n = 5$, on peut considérer les 4 carrés au sommet du carré. S'ils ont tous pour côté $a/2$, alors on n'obtient que 4 carrés. Sinon, on doit au moins avoir 6 carrés....
4. Démontrons par récurrence triple(!) que, pour tout $n \geq 6$, on peut partager un carré en n carrés.
   Initialisation : Cette propriété est vraie pour $n = 6$, $n = 7$ et $n = 8$.
   Hérédité : Soit $n \geq 6$ et supposons que la propriété est vraie pour n, $n + 1$ et $n + 2$. Alors d'après la question 2, elle est aussi vraie pour $n + 3$.
   On en déduit que, pour tout $n \geq 6$, on peut partager un carré en n carrés. Finalement, on a prouvé que l'on peut partager un carré en n carrés si et seulement si $n = 4$ ou $n \geq 6$.

Exercice 16 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) = \text{``}u_n = -1 + n(n-1)\text{''}.$$

On va prouver que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par récurrence double.
Initialisation : On a $u_0 = -1 = -1 + 0 \times (-1)$ et $u_1 = -1 = -1 + 1 \times 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et prouvons $\mathcal{P}(n+2)$. Alors on a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n \\ &= (n+1)(-1+(n+1)n) - (n+2)(-1+n(n-1)) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= -n - 1 + n(n+1)^2 + n + 2 - n(n-1)(n+2) \\ &= 1 + n(n^2+2n+1) - (n^2-n)(n+2) \\ &= 1 + n^3 + 2n^2 + n - (n^3 + n^2 - 2n) \\ &= 1 + n^2 + 3n. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$-1 + (n+2)(n+1) = -1 + n^2 + 3n + 2 = n^2 + 3n + 1.$$

On a donc bien prouvé que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Par le principe de récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Exercice 17 :

On va procéder par analyse-synthèse.

1. Analyse : on suppose que f s'écrit $f = P + I$, avec P paire et I impaire. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + I(x) \\ f(-x) &= P(-x) + I(-x) = P(x) - I(x). \end{aligned}$$

On a donc nécessairement

$$P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Ainsi, on a démontré que si f s'écrit $f = P + I$ avec P paire et I impaire, P et I sont nécessairement donnés par les formules ci-dessus et sont donc uniques.

2. Synthèse : posons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Alors, il est évident que $f = P + I$. On a aussi

$$P(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = P(x)$$

et donc P est paire. Un raisonnement similaire montre que I est impaire.

En conclusion, on a bien démontré que toute fonction s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et somme d'une fonction impaire.