Exercice 1 :

1. $\sqrt{y}$ est défini si et seulement si $y \geq 0$. On cherche donc les réels x tels que

$$2x^2 - 12x + 18 \geq 0 \iff x^2 - 6x + 9 \geq 0 \iff (x-3)^2 \geq 0.$$

Cette inégalité est toujours vérifiée et donc le domaine de définition de la fonction est $\mathbb{R}$.

2. $\ln y$ est défini si et seulement si $y > 0$. On cherche donc les réels x tels que

$$x^2 + 4x + 4 > 0 \iff (x+2)^2 > 0.$$

L'ensemble de définition de la fonction est donc $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

3. D'abord le dénominateur ne doit jamais s'annuler, ce qui exclut la valeur -7 du domaine de définition. Sinon, le dénominateur est toujours strictement positif, et on cherche donc les $x \neq -7$ pour lesquels $8 - 16x \geq 0$ ce qui est équivalent à $x \leq \frac{1}{2}$. L'ensemble de définition est donc $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \backslash\{-7\}$.

4. On remarque d'abord que $\ln(3-x)$ est défini si et seulement si $3 - x > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x < 3$. De même $\sqrt{x-1}$ est défini pour $x - 1 \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \geq 1$. Enfin, 2 est une valeur interdite. Le domaine de définition de la fonction est donc $\mathcal{D} = [1, 3[\backslash\{2\}$.

Exercice 2 :

Dans ce genre d'exercices, le plus naturel est de revenir à la définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}(f \times g)(-x) &= f(-x) \times g(-x)\\ &= (-f(x)) \times (-g(x))\\ &= f(x) \times g(x)\\ &= (f \times g)(x).\end{aligned}$$

Ainsi, $f \times g$ est paire. De même,

$$\begin{aligned}(f + g)(-x) &= f(-x) + g(-x)\\ &= (-f(x)) + (-g(x))\\ &= -(f(x) + g(x))\\ &= -(f + g)(x).\end{aligned}$$

Donc $f + g$ est impaire. Enfin,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(-x) &= f(g(-x))\\ &= f(-g(x))\\ &= -f(g(x))\\ &= -(f \circ g)(x).\end{aligned}$$

Donc $f \circ g$ est impaire.

Exercice 3 :

On va d'abord démontrer que J est symétrique par rapport à 0. Pour cela, prenons $y\in J$. Alors il existe $x\in I$ tel que $y=f(x)$. Mais alors, $-y=-f(x)=f(-x)$ est aussi élément de J. De plus, on a $f^{-1}(y)=x$ et $f^{-1}(-y)=-x=-f^{-1}(y)$. La fonction réciproque f^{-1} est bien impaire.
Cela n'a pas de sens de remplacer impaire par paire dans cet énoncé. En effet, une fonction paire n'est jamais bijective (car $f(-x)=f(x)$) sauf si son ensemble de définition est restreint à $\{0\}$.

Exercice 4 :

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f_1(-x)&=e^{-x}-e^{-(-x)}\\ &=e^{-x}-e^{x}=-f_1(x). \end{aligned}$$

La fonction f_1 est impaire. De même,

$$\begin{aligned} f_2(-x)&=\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\\ &=\frac{e^{-2x}(1-e^{2x})}{e^{-2x}(1+e^{2x})}\\ &=-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-f_2(x). \end{aligned}$$

La fonction f_2 est impaire. Enfin,

$$\begin{aligned} f_3(-x)&=\frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}\\ &=\frac{e^{-x}}{e^{-2x}(1+e^{x})^2}\\ &=\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}=f_3(x). \end{aligned}$$

La fonction f_3 est elle aussi paire.

Exercice 5 :

Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors

$$f(x+1)=f(x+3-2)=f\big((x+3)-2\big)=f(x+3)=f(x).$$

Ainsi, la fonction f est bien 1-périodique.

Exercice 6 :

On pose, pour $x \geq 0$,

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1} \geq 0.$$

Ainsi, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. De plus, $f(0) = 0$, donc, pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$ ce qui entraîne $\ln(1+x) \leq x$.
Pour démontrer l'autre inégalité, on introduit cette fois la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geq 0$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0.$$

g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) \geq 0$, donc pour tout $x \geq 0$,

$$g(x) \geq 0 \iff x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$

Exercice 7 :

1. Cette inéquation a un sens lorsque $x > -1$. De plus, $2x - 7$ est strictement négatif sur $]-1, 7/2[$, strictement positif sur $]7/2, +\infty[$ tandis que $\ln(x+1)$ est strictement négatif sur $]-1, 0[$ et strictement positif sur $]0, +\infty[$. En dressant le tableau de signes, on trouve que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-1, 0[\cup]7/2, +\infty[$.
2. Cette inéquation a un sens si et seulement si $\frac{x+1}{3x-5} > 0$. En effectuant un tableau de signes, on déduit que son domaine de définition est $\mathcal{D} =]-\infty, -1[\cup]5/3, +\infty[$. Soit $x \in \mathcal{D}$. L'inéquation est équivalente à

$$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \leq \ln(1) \iff \frac{x+1}{3x-5} \leq 1$$

par croissance de la fonction logarithme. Il faut donc résoudre cette dernière inéquation. Si $x > 5/3$, alors $3x - 5 > 0$ et l'inéquation est équivalente à

$$x + 1 \leq 3x - 5 \iff x \geq 3.$$

Si $x < -1$, alors $3x - 5 < 0$ et l'inéquation est équivalente à

$$x + 1 \geq 3x - 5 \iff x \leq 3$$

qui est toujours vérifié sur l'intervalle considéré. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty, -1[\cup[3, +\infty[$ (attention! l'intervalle est bien ouvert en -1 et fermé en 3!).

Exercice 8 :

Fixons $y > 0$ et considérons la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}.$$

Il s'agit de démontrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour cela, on va étudier les variations de f. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifie

$$f'(x) = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{2x} = \frac{x-y}{2x(x+y)}.$$

Ainsi $f'(x) \geq 0$ si $x \geq y$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \leq y$. Autrement dit, f est décroissante sur $]0, y[$ et croissante sur $]y, +\infty[$. Puisque $f(y) = 0$, on en déduit bien que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. On pourrait même démontrer que l'inégalité est stricte si $x \neq y$, car les monotonies prouvées ci-dessus sont strictes.

Exercice 9 :

Remarquons d'abord que cette équation n'a de sens que sur $]0, +\infty[$. Sur cet intervalle, en passant par l'écriture exponentielle des puissances, on a

$$\begin{aligned}
x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x &\iff e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x \ln\sqrt{x}} \\
&\iff \sqrt{x}\ln x = \frac{x}{2}\ln x \text{ car la fonction exp est injective} \\
&\iff (\ln x = 0) \text{ ou } (x = 2\sqrt{x}) \\
&\iff x = 1 \text{ ou } x = 4.
\end{aligned}$$

Exercice 10 :

1. On écrit

$$x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = \exp\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\ln x\right) = \exp\left(\ln(\ln x)\right) = \ln x.$$

2. On écrit

$$\log_x\left(\log_x x^{x^y}\right) = \frac{\ln\left(x^{y\frac{\ln x}{\ln x}}\right)}{\ln x} = y.$$

Exercice 11 :

On va commencer par démontrer que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Soit $1 \leq x < y$. Alors, par croissance stricte des fonctions logarithme (sur $]0,+\infty[$), carré (sur $[0,+\infty[$) et exponentielle (sur $\mathbb{R}$), on a successivement,

$$1 \leq x < y \implies 0 \leq \ln(x) < \ln(y) \implies 0 \leq \ln^2(x) < \ln^2(y) \implies 1 \leq f(x) < f(y).$$

De plus, $f(1) = 1$ et, par composition de limites, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Comme f est continue strictement croissante, f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.
Déterminons la bijection réciproque. Soit $y \geq 1$. L'équation $f(x) = y$ est équivalente à

$$\exp(\ln^2 x) = y \iff \ln^2(x) = \ln(y) \iff \ln(x) = \sqrt{\ln y} \iff x = \exp\left(\sqrt{\ln y}\right)$$

où on a utilisé le fait que les fonctions logarithme,racine carré, et exponentielle, sont injectives.
Donc, $f^{-1}(y) = \exp\left(\sqrt{\ln y}\right)$.

Exercice 12 :

1. f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (1+x)e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. f' est donc du signe de $1+x$, c'est-à-dire strictement négatif si $x < -1$ et strictement positif si $x > -1$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et strictement croissante sur $]-1,+\infty[$. De plus, par croissance comparée en $-\infty$, et comme produit de limites infinies en $+\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty.$$

Enfin, $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$, donc la droite $y = x$ est la tangente en la courbe en l'origine.

2. La fonction h, restriction de f à $[-1,+\infty[$ est continue et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection entre $[-1,+\infty[$ et $h([-1,+\infty[) = [-e^{-1},+\infty[$.

3. Sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, h' ne s'annule pas. On en déduit donc que W est dérivable sur $]-e^{-1},+\infty[$ et que sa dérivée vérifie, pour tout $x > -e^{-1}$,

$$W'(x) = \frac{1}{h'(W(x))}.$$

Donc,

$$W'(x) = \frac{1}{(1+W(x))e^{W(x)}}.$$

Or, $W(x)e^{W(x)} = x$, et donc $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$ si $x \neq 0$ (on a $W(x) = 0 \iff x = 0$). On obtient bien la formule

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}.$$

Exercice 13 :

La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$. Elle est aussi dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est $f'(x)=(x+1)e^x$. C'est une fonction strictement positive sur $[0;+\infty[$ donc la fonction est strictement croissante. De plus, $f(0)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Ainsi, f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.
Puisque f' ne s'annule pas, on sait que f^{-1} est dérivable sur $[0;+\infty[$. De plus, pour tout $y\in[0;+\infty[$, posant $x=f^{-1}(y)$, on a

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

Pour $y=e$, on $1=f^{-1}(e)$ (puisque $f(1)=e$), et donc

$$(f^{-1})'(e)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2e}.$$

Exercice 14 :

1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$, on a

$$f'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x}>0.$$

La fonction f est donc strictement croissante. De plus,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

et f est continue. f réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. En outre, $f(1)=0$. On en déduit que

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}.$$

Ainsi, la tangente à la courbe $y=f^{-1}(x)$ au point $x=0$ au point $x=0$ a pour équation

$$y-1=\frac{1}{2}(x-0).$$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x>0$, on a

$$f'(x)=4+4\sin^3(x)\cos x.$$

Comme $|\sin^3(x)\cos x|<1$ (les fonctions sinus et cosinus ne peuvent atteindre leur extrema au même endroit), on en déduit que $f'(x)>0$ et donc que la fonction f est strictement croissante. Elle est de plus continue et vérifie

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Ainsi, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(0)=0$. On en déduit que

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{4}.$$

Ainsi, la tangente à la courbe $y=f^{-1}(x)$ au point $x=0$ au point $x=0$ a pour équation

$$y-0=\frac{1}{4}(x-0).$$