Exercice 1 :

Le numérateur et le dénominateur s'annule tous les deux en -1, et donc on a une forme indéterminée lorsqu'on calcule la limite de f en -1. Pour lever cette indétermination, on factorise le dénominateur en

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

(pour trouver cette forme, on peut procéder par identification en écrivant $x^3+1=(x+1)(x^2+ax+b)$). On en déduit alors que, pour tout $x\neq -1$, on a

$$f(x)=\frac{1}{x^2-x+1}.$$

Ainsi, $\lim_{x\to -1} f(x)=1/3$ et on en déduit que l'on peut prolonger f par continuité en 1 en posant $f(-1)=1/3$.

Exercice 2 :

1. Par les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, on a

$$|f(x)|\leq |\sin x||\sin(1/x)|\leq |x|\times 1\leq |x|.$$

Par le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to 0} f(x)=0$. On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.

2. En remplaçant $\sin$ par $\cos$, le procédé précédent ne fonctionne plus puisque $\cos(0)\neq 0$. On va prouver qu'on ne peut pas prolonger g par continuité en 0. Pour cela, on considère les deux suites

$$u_n=\frac{1}{2n\pi}\text{ et }v_n=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}.$$

Alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0. Cependant,

$$g(u_n)=\cos(u_n)\cos(2n\pi)=\cos(u_n)\to 1$$

tandis que

$$g(v_n)=\cos(v_n)\cos(2n\pi+\pi/2)=0.$$

Ainsi, $(g(u_n))$ converge vers 1 et $(g(v_n))$ converge vers 0. g n'admet pas de limite en 0 et n'est donc pas prolongeable par continuité en ce point.

3. Par les théorèmes généraux, h est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Par ailleurs, posant $u=x+1$, on a

$$\lim_{x\to -1} h(x)=\lim_{u\to 0}\sin(u)|\ln(u)|=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\times u|\ln(u)|=1\times 0=0.$$

Ainsi, on peut prolonger par continuité h en -1 en posant $h(-1)=0$.

Exercice 3 :

Posons, pour $x > 0$, $f(x) = \cos x - \frac{1}{x}$. Alors f est continue sur $]0, +\infty[$. Soit $k \geq 1$ un entier. Alors on a

$$f(2k\pi) = 1 - \frac{1}{2k\pi} \geq 0$$

alors que

$$f(2k\pi + \pi) = -1 - \frac{1}{2k\pi + \pi} \leq 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel x_k dans l'intervalle $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ tel que $f(x_k) = 0$. On a clairement $x_k < 2(k+1)\pi \leq x_{k+1}$. Ainsi, les réels x_k sont deux à deux disjoints et l'équation admet une infinité de solutions.