Exercice 1 :

On va utiliser la méthode du pivot de Gauss. Pour le premier système, on écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 3 \\ x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z & = & 3 & \\ y-z & = & -2 & L_2-L_1\to L_2 \\ -y-3z & = & -6 & L_3-2L_1\to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z & = & 3 & \\ y-z & = & -2 & \\ -4z & = & -8 & L_3+L_2\to L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & 0 \\ z & = & 2 \end{array}\right.$$

Pour le second système, on procède de la même façon :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2z & = & 1 \\ -y+z & = & 2 \\ x-2y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2z & = & 1 & \\ -y+z & = & 2 & \\ -2y-2z & = & 0 & L_3-L_1\to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2z & = & 1 & \\ -y+z & = & 2 & \\ -4z & = & -4 & L_3-2L_2\to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & -1 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 3 :

On résout le première système par la méthode du pivot de Gauss. En notant (S) ce système, on a

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+5y+9z & = & 180 & \\ -35y-76z & = & -1580 & L_2-9L_1 \\ -41y-89z & = & -1850 & L_3-10L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+5y+9z & = & 180 & \\ -35y-76z & = & -1580 & \\ z & = & 30 & 35L_3-41L_2 \end{array}\right.$$

On conclut alors facilement que le système admet une solution unique qui vaut (10,-20,30). La résolution de l'autre système est très semblable et donne pour solution unique (-66,69,-11). Deux systèmes très proches peuvent donc avoir des solutions très différentes. On dit que le système est mal conditionné.

Exercice 2 :

Pour le premier système :

$$\begin{cases} x+y+z-3t &= 1 \\ 2x+y-z+t &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z-3t &= 1 \\ -y-3z+7t &= -3 \end{cases}$$

Le système est triangulaire, et il y a plus d'inconnues que d'équations. On va donc exprimer certaines inconnues en fonctions des autres. Par exemple, ici, on peut exprimer x et y en fonction de z et t. Le système devient :

$$\begin{cases} x+y+z-3t &= 1 \\ -y-3z+7t &= -3 \\ z &= z \\ t &= t \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 2z-4t-2 \\ y &= -3z+7t+3 \\ z &= z \\ t &= t \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left\{(2z-4t-2, -3z+7t+3, z, t);\ (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Pour le second système, on écrit

$$\begin{cases} x+2y-3z &= 4 \\ x+3y-z &= 11 \\ 2x+5y-5z &= 13 \\ x+4y+z &= 18 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y-3z &= 4 & \\ y+2z &= 7 & L_2-L_1 \to L_2 \\ y+z &= 5 & L_3-2L_1 \to L_3 \\ 2y+4z &= 14 & L_4-L_1 \to L_4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y-3z &= 4 & \\ y+2z &= 7 & \\ -z &= -2 & L_3-L_2 \to L_3 \\ 0 &= 0 & L_4-2L_2 \to L_4 \end{cases}$$

La dernière équation, qui est une relation de compatibilité, est vérifiée. On en déduit alors facilement que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{(4,3,2)\}.$$

Exercice 4 :

Notons (S) ce système, et appliquons la méthode du pivot de Gauss en choisissant la troisième ligne comme pivot :

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+z &= 1-a & L_3 \\ y+z &= 0 & L_2-aL_3 \\ (1-2a)y+(1-2a)z &= 2a^2-a & L_1-aL_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z &= 1-a \\ y+z &= 0 \\ a(2a-1) &= 0 \end{cases}$$

On distingue alors plusieurs cas. Si $a \notin \{0, 1/2\}$, le système n'est pas compatible et n'admet donc pas de solutions. Si $a=0$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ y+z &= 0 \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions est $\{(1,y,-y);\ y\in\mathbb{R}\}$. Si $a=1/2$, le système devient

$$\begin{cases} x+y+z &= 1/2 \\ y+z &= 0 \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions est $\{(1/2,y,-y);\ y\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 5 :

1. Puisque $P(-1) = a - b + c$, le triplet (a, b, c) vérifie l'équation $a - b + c = 5$. Les valeurs $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$ donnent les autres équations $a + b + c = 1$ et $4a + 2b + c = 2$. Ainsi, le triplet (a, b, c) vérifie la propriété demandée si et seulement s'il est solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a - b + c & = & 5 \\ a + b + c & = & 1 \\ 4a + 2b + c & = & 2 \end{array}\right.$$

On résout alors ce système en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a - b + c & = & 5 \\ a + b + c & = & 1 \\ 4a + 2b + c & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} a - b + c & = & 5 & \\ 2b & = & -4 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 6b - 3c & = & -18 & L_3 \rightarrow L_3 - 4L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a - b + c & = & 5 \\ b & = & -2 \\ -12 - 3c & = & -18 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a - b + c & = & 5 \\ b & = & -2 \\ c & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -2 \\ c & = & 2 \end{array}\right.$$

Le seul triplet qui convient est $(1, -2, 2)$, soit le polynôme $P(x) = x^2 - 2x + 2$.

2. On applique la même méthode, mais cette fois le système ne comporte que deux équations. Il n'aura pas une solution unique, et on va exprimer une inconnue en fonction des autres.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a - b + c & = & 4 \\ 4a + 2b + c & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} a - b + c & = & 4 & \\ 6b - 3c & = & -15 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a - b + c & = & 4 \\ c & = & 2b + 5 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -b - 1 \\ c & = & 2b + 5 \end{array}\right.$$

Les triplets solutions sont tous ceux qui s'écrivent $(-b - 1, b, 2b + 5)$ avec $b \in \mathbb{R}$, qui correspondent aux polynômes $(-b - 1)x^2 + bx + 2b + 5$.