Exercice 1 :

1. On a d'une part

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{(x-3)^2} = 0$$

d'où

$$\lim_{x \to +\infty} 5 - \frac{4}{(x-3)^2} = 5$$

(théorème sur les sommes de limites). Puisque $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, on en déduit (théorème sur les produits de limites) que

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(5 - \frac{4}{(x-3)^2}\right) = +\infty.$$

2. On a

$$\lim_{x \to 0^-} \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) = \ln(1/2) < 0$$

puisque $1/2 < 1$ et que la fonction logarithme est strictement croissante. D'autre part,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{4}{x} = -\infty.$$

On en déduit (théorème sur les produits de limites) que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{4\ln(x + \frac{1}{2})}{x} = +\infty.$$

Exercice 2 :

1. On a $\lim_{x\to5} x^2-11x+28=-2$ et $\lim_{x\to5} x^2-25=0$. Il faut faire attention au signe du dénominateur. Pour $x>5$, on a $x^2>25$ et donc $\lim_{x\to5^+} x^2-25=0^+$. On en déduit que

$$\lim_{x\to5^+}\frac{x^2-11x+28}{x^2-25}=-\infty.$$

2. On procède de la même façon, mais on remarque que $\lim_{x\to5^-} x^2-25=0^-$. On a cette fois

$$\lim_{x\to5^-}\frac{x^2-11x+28}{x^2-25}=+\infty.$$

3. On a $\lim_{x\to5} x^2-9x+20=0$, et donc on est en présence d'une forme indéterminée $0/0$. On va lever cette forme indéterminée en factorisant le numérateur et le dénominateur par la racine commune. En effet, on a d'une part

$$x^2-25=(x-5)(x+5)$$

et d'autre part

$$x^2-9x+20=(x-5)(x-4).$$

On peut donc écrire que

$$\frac{x^2-9x+16}{x^2-25}=\frac{(x-5)(x-4)}{(x-5)(x+5)}=\frac{x-4}{x+5}.$$

On n'est plus en présence d'une forme indéterminée, car

$$\lim_{x\to5} x-4=1 \text{ et } \lim_{x\to5} x+5=10.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-9x+16}{x^2-25}=\frac{1}{10}.$$

Il n'y a plus besoin ici de distinguer limite à droite et limite à gauche.

Exercice 3 :

1. On a $f(x) = \sqrt{g(x)}$ si on pose $g(x) = \dfrac{4x+1}{x}$.

2. D'une part, en 0, on a $\lim_{x\to 0} 4x+1 = 1$ et $\lim_{x\to 0^+} x = 0^+$. En utilisant le théorème sur les quotients de limites, on en déduit que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, on sait que, puisque g est le quotient de deux polynômes, on a

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 4 = 4.$$

3. D'une part, on sait que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$. On en déduit que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, par le théorème de composition des limites.
D'autre part, on sait que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 4$ et que $\lim_{y\to 4} \sqrt{y} = 2$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Exercice 4 :

Dans chaque cas, on va multiplier par la quantité conjuguée.

1.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4} &= \frac{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4})}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}\\ &= \frac{(x+4)-(x-4)}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}\\ &= \frac{8}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}.\end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée) et donc on a

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+4}-\sqrt{x-4} = 0.$$

2.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1}-x &= \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}\\ &= \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}.\end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, et donc on a

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-x = 0.$$

Exercice 5 :

Dans le premier cas, on a une forme indéterminée du type $+\infty - \infty$, et dans les trois autres cas, on a une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. On lève souvent ces formes indéterminées en mettant en facteur le terme dominant.

1. On met en facteur e^{2x}. Il vient :

$$e^{2x} - e^{x} = e^{2x}\left(1 - \frac{e^{x}}{e^{2x}}\right) = e^{2x}(1 - e^{-x}).$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x} - e^{x} = +\infty.$$

2. On met en facteur e^{2x} au numérateur, et x au dénominateur. On a

$$\frac{e^{2x}+1}{x+3} = \frac{e^{2x}}{x} \times \frac{1+e^{-2x}}{1+\frac{3}{x}}.$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + e^{-2x} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1+\frac{3}{x}} = 1.$$

D'autre part, par croissance comparée, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty.$$

Finalement, on conclut par produit de limites que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+1}{x+3} = +\infty.$$

3. On met en facteur xe^{x} au numérateur, et e^{x} au dénominateur. Il vient :

$$\frac{xe^{x}+2e^{x}-5}{e^{x}-3} = \frac{xe^{x}}{e^{x}} \times \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^{x}}}{1-3e^{-x}} = x \times \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^{x}}}{1-3e^{-x}}.$$

Or, puisque $\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée!), puisque $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, il vient

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}=1,\ \lim_{x\to+\infty} 1-3e^{-x}=1 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}=1.$$

On en déduit par produit de limites que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3}=+\infty.$$

4. On met en facteur x^2 au numérateur et au dénominateur. On trouve

$$\frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}=\frac{x^2}{x^2}\times\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}=\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}.$$

Puisque $-1\leq\sin x\leq 1$, on a pour tout $x>0$,

$$\frac{-1}{x}\leq\frac{\sin x}{x}\leq\frac{1}{x}$$

et donc par le théorème des gendarmes $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. On prouve de la même façon que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$. On a donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}=\frac{1}{1}=1.$$

Exercice 6 :

1. On écrit

$$\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}\left(1-\frac{2}{1+x}\right)=\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1}{1+x}.$$

On a levé l'indéterminée, et la limite recherchée vaut donc $-1/2$.

2. L'astuce est de remarquer que $x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ pour pouvoir simplifier numérateur et dénominateur. On trouve donc

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

et la limite recherchée vaut donc 1/2.

3. On met en facteur le terme dominant au numérateur (x^3) et au dénominateur ($5x^3$). Après simplification, on trouve :

$$\frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}=\frac{1}{5}\times\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{7}{5x}+\frac{8}{5x^3}}$$

est la limite recherchée est $1/5$.

4. On utilise la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2+2x}-x=\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\frac{2x}{x\sqrt{1+2/x}+x}=\frac{2}{\sqrt{1+2/x}+1}.$$

La limite recherchée est égale à 2/2=1.

5. On utilise le changement de variables $u = x^2$. Il vient

$$\lim_{x\to+\infty} x^5 e^{-x^2} = \lim_{u\to+\infty} u^{5/2} e^{-u}.$$

Par comparaison de la fonction exponentielle et des fonctions puissance, cette limite vaut 0.

6. On met en facteur le terme dominant :

$$\frac{x+\cos x}{x+\sin x} = \frac{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}.$$

Mais on a

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

et donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. De même, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x} = 1.$$

7. On met de même en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{x\ln x+7}{x^2+4} = \frac{x\ln x\left(1+\frac{7}{x\ln x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1+\frac{7}{x\ln x}}{1+\frac{4}{x^2}}.$$

Or, on sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x+7}{x^2+4} = 0.$$

8. On va majorer et conclure par le théorème des gendarmes : pour $x > 0$,

$$\left|\frac{4\sin^2 x+3\cos(5x)}{x}\right| \leq \frac{4\sin^2 x+3|\cos(5x)|}{x} \leq \frac{7}{x}.$$

Par majoration, la limite recherchée est 0.

Exercice 7 :

1. On factorise par le terme dominant au numérateur et au dénominateur, et on trouve

$$\frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}} = e^{2x} \times \frac{1+2xe^{-3x}+7e^{-3x}}{1+e^{-2x}}.$$

Par comparaison des fonctions puissance et exponentielle, on a $\lim_{+\infty} xe^{-3x} = 0$ et donc la fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

2. On va multiplier par la quantité conjuguée au numérateur et au dénominateur. On trouve

$$\frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1+x-\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{x^2\times\left(\sqrt{1+x}+\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)} = \frac{-1}{4\left(\sqrt{1+x}+\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)}.$$

On en déduit que la limite recherchée vaut $-\frac{1}{8}$.

3. On met en facteur le terme dominant et on trouve, pour $x>0$ (attention au calcul au numérateur!)

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}.$$

On a levé la forme indéterminée, et la limite recherchée vaut donc 1.

4. On a une forme indéterminée du type $0/0$. On la lève en multipliant par la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x}=\frac{2x^2+5x+9-9}{x\left(\sqrt{2x^2+5x+9}+3\right)}=\frac{2x+5}{\sqrt{2x^2+5x+9}+3}.$$

La limite recherchée est donc $5/6$.

5. On utilise (bien sûr!) la quantité conjuguée, qui donne

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}.$$

En mettant en facteur $\sqrt{x}$ au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}+1}.$$

La forme n'est plus indéterminée, et la limite recherchée est $1/2$.

Exercice 8 :

Par définition de la partie entière, on sait que

$$\frac{1}{x}-1<\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leq\frac{1}{x}.$$

L'inégalité de gauche suffit, par comparaison, à dire que $\lim_{0^+} f=+\infty$. Si on multiplie maintenant les inégalités par $x>0$, on trouve

$$1-x\leq g(x)\leq 1,$$

ce qui prouve, toujours par le théorème d'encadrement, que $\lim_{0^+} g=1$. Enfin, puisque $h=xg$, on trouve aussi que $\lim_{0^+} h=0$.

Exercice 9 :

Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{b}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{x}.$$

Pour $x > 0$, on en déduit

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} \leq f(x) \leq \frac{b}{a}.$$

Par le théorème d'encadrement, f admet $\frac{b}{a}$ comme limite à droite en 0. De la même façon, pour $x < 0$, on a

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} \geq f(x) \geq \frac{b}{a}$$

et f admet $\frac{b}{a}$ comme limite à gauche en 0. On en déduit que f admet une limite à 0 égale à $\frac{b}{a}$. Concernant g, on remarque que si $x \in]-a, 0[$, alors

$$g(x) = -\frac{b}{x}$$

et donc $\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$. Pour $x \in]0, a[$, on a

$$g(x) = 0$$

et donc $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$. Ainsi, g n'admet pas de limite en 0.