Exercice 1 :

On va procéder par double inclusion. Le plus facile est de prouver que $C \subset A$. En effet, prenons un couple $(x,y) \in C$. Alors on sait qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t+1$ et $y = 4t+3$. Mais alors,

$$4x - y = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$$

et donc on a bien $(x,y) \in A$.
Réciproquement, prenons $(x,y) \in A$ et prouvons que $(x,y) \in C$. C'est plus difficile, car il faut construire un réel t. On va procéder par analyse-synthèse. Si un tel t existe, alors nécessairement on doit avoir $t = x - 1$. Posons donc $t = x - 1$. Alors, $y = 4x - 1 = 4(t+1) - 1 = 4t + 3$. On a donc bien $(x,y) = (t+1, 4t+3)$ et $(x,y) \in C$.

Exercice 2 :

Non! Prendre par exemple $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$ et $C = \{2,3\}$.

Exercice 3 :

Prenons $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$, et donc $x \in B \cap C$. En particulier, $x \in B$, et donc $A \subset B$.
Prenons maintenant $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$, et donc $x \in B \cap C$. En particulier, $x \in C$, et donc $B \subset C$.

Exercice 4 :

Il y a d'abord un sens qui est facile : si $A = \varnothing$, alors par définition de la différence symétrique, on a bien $A \Delta B = B$ car $A = \varnothing$ et $\bar{A} \cap B = B$. Réciproquement, si $A \Delta B = B$, il faut prouver que $A = \varnothing$. On va découper la preuve en deux parties :

1. on prouve que $A \cap B = \varnothing$. En effet, prenons $x \in B$. Alors, en particulier $x \in A \Delta B$, et donc $x \in A \cap \bar{B}$ ou $x \in \bar{A} \cap B$. La première éventualité est impossible (car $x \in B$) et donc on a $x \in \bar{A} \cap B$. Ainsi, tout élément de B est aussi dans $\bar{A}$, et donc $A \cap B = \varnothing$.
2. on va aussi prouver que $A \cap \bar{B} = \varnothing$. En effet, imaginons qu'on puisse trouve un élément dans $A \cap \bar{B}$. Alors cet élément serait aussi dans $A \Delta B = B$, ce qui est impossible puisqu'il serait simultanément dans B et dans $\bar{B}$.

La confrontation des deux propriétés précédentes entraîne alors que $A = \varnothing$.

Exercice 5 :

1. $h = 1 - f$ est la fonction caractéristique du complémentaire de A, $\bar{A}$. En effet, on a $h(x) = 0$ si $f(x) = 1$, c'est-à-dire si $x \in A$, c'est-à-dire si $x \notin \bar{A}$, et $h(x) = 1$ si $f(x) = 0$, c'est-à-dire si $x \notin A$, c'est-à-dire si $x \in \bar{A}$.
2. $h = fg$ est la fonction caractéristique de $A \cap B$. En effet, si $x \in A \cap B$, alors $f(x) = g(x) = 1$, et donc $h(x) = 1$. Si $x \notin A \cap B$, alors ou bien $x \notin A$ et $f(x) = 0$ ou bien $x \notin B$ et $g(x) = 0$. Dans tous les cas, $h(x) = 0$.
3. $h = f + g - fg$ est la fonction caractéristique de $A \cup B$. En effet, si $x \notin A \cup B$, alors $f(x) = g(x) = 0$, et donc $h(x) = 0$. Si $x \in A \cup B$, alors on peut distinguer trois cas :
   - $x \in A$ et $x \in B$: on a alors $f(x) = g(x) = 1$, et $h(x) = 1 + 1 - 1 = 1$;
   - $x \in A$ et $x \notin B$: on a alors $f(x) = 1$ et $g(x) = 0$, soit $h(x) = 1 + 0 - 0 = 1$;
   - $x \notin A$ et $x \in B$: on a alors $f(x) = 0$ et $g(x) = 1$, soit $h(x) = 0 + 1 - 0 = 1$.

Exercice 6 :

1. Si A est une partie de $E\cap F$, alors $A\subset E\cap F$, donc on a à la fois $A\subset E$ et $A\subset F$. A est bien une partie de E et une partie de F. Autrement dit, on a prouvé que si $A\in\mathcal P(E\cap F)$, alors $A\in\mathcal P(E)$ et $A\in\mathcal P(F)$. Ceci signifie que $\mathcal P(E\cap F)\subset\mathcal P(E)\cap\mathcal P(F)$.
2. Oui, si $B\subset E$ et $B\subset F$, alors $B\subset E\cap F$. Autrement dit, si $B\in\mathcal P(E)\cap\mathcal P(F)$, alors $B\subset P(E\cap F)$. Ainsi, on a prouvé l'autre inclusion $\mathcal P(E)\cap\mathcal P(F)\subset\mathcal P(E\cap F)$. Finalement, on a $\mathcal P(E)\cap\mathcal P(F)=\mathcal P(E\cap F)$
3. Prenons $A\in\mathcal P(E)\cup\mathcal P(F)$. Alors, ou bien $A\in\mathcal P(E)$. Donc A est une partie de E, et en particulier une partie de $E\cup F$, donc $A\in\mathcal P(E\cup F)$. Sinon, $A\in\mathcal P(F)$. Donc A est une partie de F, et en particulier une partie de $E\cup F$. Donc $A\in\mathcal P(E\cup F)$. Dans tous les cas, $A\in\mathcal P(E\cup F)$, et ceci prouve l'inclusion $\mathcal P(E)\cup\mathcal P(F)\subset\mathcal P(E\cup F)$.
4. L'idée est qu'une partie de $E\cup F$ n'est pas forcément une partie de E ou une partie de F. Prenons par exemple $E=\{1,2\}$ et $F=\{3,4\}$. Alors $A=\{2,3\}$ est une partie de $E\cup F$, mais n'est ni une partie de E, ni une partie de F. Dans ce cas, $\mathcal P(E\cup F)$ n'est pas inclus dans $\mathcal P(E)\cup\mathcal P(F)$.

Exercice 7 :

On va commencer par calculer $f\circ f(x)$ pour émettre une conjecture. On a

$$f\circ f(x)=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1}.$$

Ceci nous conduit à conjecturer que

$$f\circ f\circ\dots\circ f(x)=\frac{x}{nx+1}.$$

Démontrons ce résultat par récurrence. Il est vrai au rang $n=1$ et $n=2$. Supposons le résultat démontré au rang $n-1$. Alors

$$f\circ f\circ\dots\circ f(x)=\frac{\frac{x}{x+1}}{(n-1)\frac{x}{x+1}+1}=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{(n-1)x+x+1}{x+1}}=\frac{x}{nx+1}.$$

Le résultat est donc encore vrai au rang n. Par le principe de récurrence, il est vrai pour tout entier n.
Remarquons que la rédaction ne s'est posée la question de savoir pour quelle valeur de x on pouvait définir $f\circ f\circ\dots\circ f(x)$. Voici une jolie question subsidiaire...

Exercice 8 :

f_1 est injective, non surjective (et donc non bijective) : 1 n'a pas d'antécédents. f_2 est bijective. f_3 n'est ni injective ($f(-1)=f(1)=1$), ni surjective (-1 n'a pas d'antécédents). f_4 et f_5 sont surjectives, mais non injectives.

Exercice 9 :

1. f est clairement injective, mais n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.
2. g est bijective : l'équation $n+1=k$, avec $k\in\mathbb{Z}$ admet une unique solution $n\in\mathbb{Z}$ qui vaut $n=k-1$.
3. h est bijective : prenons en effet un couple (x_1,y_1) de $\mathbb{R}^2$, et essayons de résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y &= x_1 \\ x-y &= y_1 \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution, donnée par $x=(x_1+y_1)/2$ et $y=(x_1-y_1)/2$. L'application est bijective.

Exercice 10 :

Le plus simple est de remarquer que ϕ est même bijective, car $\phi\circ\phi=Id_{\mathcal{P}(E)}$, ce qui prouve que ϕ est bijective avec $\phi^{-1}=\phi$.
Sinon, on peut prouver directement que ϕ est injective et surjective. Le point clé est encore que le complémentaire du complémentaire de A est égal à A. Ainsi, si $A,B\in\mathcal{P}(E)$ sont tels que $\phi(A)=\phi(B)$, on a $\overline{\phi(A)}=\overline{\phi(B)}$ et donc $A=B$ puisque $\overline{\phi(A)}=A$ et $\overline{\phi(B)}=B$. Ainsi, ϕ est injective.
De même, ϕ est surjective car si $B\in\mathcal{P}(E)$, et si on pose $A=\overline{B}=\phi(B)$, alors $\phi(A)=\overline{\phi(B)}=B$.

Exercice 11 :

Soit $y\in[0;1[$ et soit $x\in\mathbb{R}_+$. Alors on a

$$\begin{aligned} y=g(x) &\iff y=\frac{x}{1+x} \\ &\iff (1+x)y=x \\ &\iff y=-xy+x=x(1-y) \\ &\iff x=\frac{y}{1-y}. \end{aligned}$$

Pour $y\in[0;1[$, on vérifie que $\frac{y}{1-y}\geq 0$. Pour tout $y\in[0;1[$, l'équation $y=g(x)$ admet donc une unique solution $x\in[0;+\infty[$. C'est donc que la fonction g est bijective et sa bijection réciproque est $g^{-1}:[0;1[\to[0;+\infty[$ définie par $g^{-1}(y)=\frac{y}{1-y}$.

Exercice 12 :

La première chose à remarquer est que f s'écrit plus facilement

$$f(x) = e^{2x} + 2e^x.$$

Soit $y > 0$. Alors on a

$$y = f(x) \iff e^{2x} + 2e^x - y = 0.$$

On pose alors $X = e^x$ et l'équation est équivalente à l'équation du second degré

$$X^2 + 2X - y = 0$$

dont les racines sont

$$X_1 = -1 - \sqrt{1+y} \text{ et } X_2 = -1 + \sqrt{1+y}.$$

Mais $e^x > 0$, et donc on a

$$y = f(x) \iff e^x = -1 + \sqrt{1+y} \iff x = \ln\left(-1 + \sqrt{1+y}\right).$$

L'équation $y = f(x)$ admet donc toujours une unique solution. La fonction f est bijective et

$$f^{-1}(y) = \ln\left(-1 + \sqrt{1+y}\right).$$

Exercice 13 :

Première implication : si $f(a) = f(b)$, alors $g \circ f(a) = g \circ f(b)$, et puisque $g \circ f$ est injective, on en déduit $a = b$.
Deuxième implication : soit $y \in C$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $a \in A$ avec $g \circ f(a) = y$. Posons $b = f(a)$. On a alors $g(b) = y$, ce qui prouve que g est surjective.
Equivalence : d'abord, si f, g et h sont bijectives, la composée d'applications bijectives étant bijective, on en déduit que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Réciproquement, puisque $g \circ f$ est bijective, elle est surjective, et on trouve que g est surjective. D'autre part, puisque $h \circ g$ est bijective, elle est injective et donc g est injective. On trouve donc que g est bijective. Puisque $g \circ f$ est bijective, composant par g^{-1} à gauche qui est bijective, f est bijective. De même, puisque $h \circ g$ est bijective et que g est bijective, $(h \circ g) \circ g^{-1}$ est bijective, et ceci est égal à h.

Exercice 14 :

1. Supposons que g ne soit pas injective. Alors il existe $a, b \in F$ tels que $g(a) = g(b)$ et $a \neq b$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = a$ et il existe $y \in E$ tel que $f(y) = b$. Puisque $a \neq b$, on a bien sûr $x \neq y$. Mais alors, $h(x) = g(f(x)) = g(a) = g(b) = g(f(y)) = h(y)$, et donc h n'est pas injective, une contradiction.
2. Soit $y \in F$. Alors, $g(y) \in G$ et donc, puisque h est surjective, il existe $x \in E$ tel que $h(x) = g(y)$. Mais $h(x) = g(f(x)) = g(y)$. Puisque g est injective, on a $f(x) = y$. Ceci prouve bien que f est surjective.

Exercice 15 :

1. Prenons $y \in f(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Mais alors, $x \in B$ et donc $y \in f(B)$. Ceci prouve l'inclusion $f(A) \subset f(B)$. La réciproque n'est pas toujours vraie. Prenons $E = \{1, 2\}$, $F = \{1\}$, $f : E \to F$ définie par $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$. Alors $f(A) = f(B) = \{1\}$ alors que pourtant A n'est pas inclus dans B.
2. On a $A \cap B \subset A$, et donc $f(A \cap B) \subset f(A)$. De même, $f(A \cap B) \subset f(B)$, et donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
L'inclusion réciproque est fausse, ce que l'on constate en prenant exactement le même exemple.
3. On a $A \subset A \cup B$ et donc $f(A) \subset f(A \cup B)$. De même, $f(B) \subset f(A \cup B)$ et donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
Réciproquement, si $y \in f(A \cup B)$, alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Mais si $x \in A$, on a $y \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$ et de même, si $x \in B$, on a $y \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$. Dans tous les cas, on a prouvé que $y \in f(A) \cup f(B)$ et donc l'inclusion $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Exercice 16 :

1. Supposons d'abord f injective et soient $g : Z \to X$ et $h : Z \to X$ telles que $f \circ g = g \circ h$. Alors, pour tout z de Z, on a $f(g(z)) = f(h(z)) \implies g(z) = h(z)$ puisque f est injective. On a donc bien $g = h$.
Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que f n'est pas injective. Soient $x \neq y$ tel que $f(x) = f(y)$. Posons $Z = \{0\}$, $g(0) = x$ et $h(0) = y$. Alors on a $f \circ g(0) = f \circ h(0) = f(x) = f(y)$ alors que $g \neq h$.
2. Supposons d'abord f surjective et soient $g : Y \to Z$ et $h : Y \to Z$ telles que $g \circ f = h \circ f$. Soit $y \in Y$. Il existe x de X tel que $y = f(x)$. On en déduit $g(y) = g \circ f(x) = h \circ f(x) = h(y)$, ce qui prouve $g = h$.
Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que f n'est pas surjective. Il existe donc un point y_0 de Y qui n'est pas dans $f(X)$. On considère alors $Z = \{0, 1\}$, g défini sur Y par $g(y_0) = 1$ et $g(y) = 0$ sinon, h défini sur Y par $h(y) = 0$ pour tout y. Alors on a bien $g \circ f = h \circ f$ (car $f(x) \neq y_0$ pour tout x de X) et $h \neq g$.