Exercice 1 :

Notons E, H, M et S les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués. L'énoncé donne :

$$\operatorname{card}(E)=800,\ \operatorname{card}(H)=300,\ \operatorname{card}(S)=352,\ \operatorname{card}(M)=424,$$

$$\operatorname{card}(H\cap S)=188,\ \operatorname{card}(H\cap M)=166,\ \operatorname{card}(S\cap M)=208,\operatorname{card}(H\cap M\cap S)=144.$$

On cherche $\operatorname{card}(\bar{H}\cap\bar{M}\cap\bar{S})$, où $\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans E. D'après les lois de Morgan :

$$\operatorname{card}(\bar{H}\cap\bar{M}\cap\bar{S})=\operatorname{card}(\overline{H\cup M\cup S}).$$

On applique la formule du crible de Poincaré :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(H\cup M\cup S)=\operatorname{card}(H)+\operatorname{card}(M)+\operatorname{card}(S)-\operatorname{card}(H\cap M)-\operatorname{card}(H\cap S)-\operatorname{card}(M\cap S)\\+\operatorname{card}(H\cap M\cap S).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{card}(H\cup M\cup S)=658,$$

et

$$\operatorname{card}(\bar{H}\cap\bar{M}\cap\bar{S})=800-658=142.$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées.

Exercice 2 :

1.

1.1. Il y a $9^3=9\times 9\times 9=729$ codes possibles.
1.2. Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2,4,6,8). Il y a donc $9\times 9\times 4$ tels codes.
1.3. On va compter par différence. Il y a $8\times 8\times 8$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9\times 9\times 9-8\times 8\times 8=217$ codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.
1.4. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3\times 8\times 8$ tels codes.

2.

2.1. On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9\times 8\times 7$ choix possibles.
2.2. Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8\times 7\times 5$ tels codes.
2.3. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de $8\times 7\times 3$.

Exercice 3 :

1. Il s'agit de choisir trois joueurs parmi 8. Le nombre de comités possibles est donc de $\binom{8}{3} = 56$.
2. Il s'agit de choisir deux garçons parmi 6, puis une fille parmi 2. Le nombre de choix possibles est donc de $\binom{6}{2} \times \binom{2}{1}$.
3. On compte le nombre de comités comprenant 3 garçons : il vaut $\binom{6}{3}$ (il faut choisir trois garçons parmi 6). On a déjà compté le nombre de comités comprenant exactement deux garçons. Donc le nombre de comités comprenant au moins deux garçons vaut $\binom{6}{2} \times \binom{2}{1} + \binom{6}{3}$.
4. Il ne reste qu'à choisir le dernier membre du comité : il y a 6 comités comprenant à la fois Fred et Émile.
5. On compte les comités comprenant Fred, mais pas Émile, et les comités comprenant Émile, mais pas Fred. Dans le premier cas, on trouve $\binom{6}{2}$ comités (il reste à choisir deux joueurs parmi 6, puisqu'on ne peut plus prendre ni Fred, ni Émile). Dans le second cas, on a aussi $\binom{6}{2}$ comités. On compte enfin les comités ne comprenant ni Fred, ni Émile. Il y en a $\binom{6}{3}$. Finalement, le nombre total de comités ne comprenant pas simultanément Émile et Fred est $\binom{6}{2} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 50$. Plus simplement, on pouvait aussi soustraire du nombre total de comités (56, cf question 1) le nombre de comités comprenant à la fois Fred et Émile (6, cf question 4), et on retrouve bien 50 comités ne comprenant pas simultanément Fred et Émile.

Exercice 4 :

1. Pour écrire un élément de A, on a
- 8 choix pour le premier chiffre (tous sauf 0 et 1).
- 9 choix pour les 6 autres chiffres (tous sauf 1).

On a donc $\mathbf{card}(A) = 8 \times 9^6$.

2. Pour écrire un élément de A_1, on a
- 8 choix pour le premier chiffre (tous sauf 0 et 1)
- Notant E l'ensemble des chiffres différents de 1 et du premier chiffre choisi, le reste de l'écriture de cet élément consiste en un choix ordonnée de 6 éléments distincts de E.

Puisque E comporte 8 élément, on a donc :

$$\mathbf{card}(A_1) = 8 \times A_8^6 = 8\frac{8!}{2!}.$$

3. Un élément de A est pair si son chiffre des unités est 0,2,4,6 ou 8. Il y a 5 façons de choisir ce chiffre des unités, 8 façons de choisir le premier chiffre, et 9^5 autres de choisir les autres chiffres. On a donc :

$$\mathbf{card}(A_2) = 5 \times 8 \times 9^5.$$

4. Remarquons qu'un élément de A_3 ne comporte pas le chiffre zéro. Il y a $\binom{8}{7}$ façons de choisir 7 chiffres tous distincts parmi $\{2, 3, \dots, 9\}$, et une seule façon, ces 7 chiffres choisis, de les écrire en ordre croissant. On a donc

$$\mathbf{card}(A_3) = \binom{8}{7} = 8.$$

Exercice 5 :

Un anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot! On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombres de permutations entre lettres identiques. On trouve donc :

- MATHS : 5!
- RIRE : 4!/2!
- ANANAS : 6!/(2!3!)

Exercice 6 :

1.

1.1. Puisque deux éléments sont fixés, il reste à choisir 3 éléments parmi 10. Le nombre recherché est $\binom{10}{3}$.

1.2. Un élément est déjà choisi, il reste à en choisir 4 parmi 10 (puisque b est exclu et qu'on ne peut bien sûr par reprendre a). Il y a donc $\binom{10}{4}$ telles parties.

1.3. Idem.

1.4. On doit cette fois choisir 5 éléments parmi 10 : il y a $\binom{10}{5}$ parties ne comprenant ni a ni b.

2. Il y a $\binom{12}{5}$ parties à 5 éléments de E. Mais on a réalisé une partition de ces parties : celles qui contiennent a et b, celles qui contiennent seulement un des deux éléments, celles qui ne contiennent aucun des deux. D'où la formule demandée.

3. On part cette fois d'un ensemble à n éléments dont on fixe deux éléments a et b. Le nombre de parties à p éléments de cet ensemble est $\binom{n}{p}$. On réalise une partition de ces parties en les parties :

- contenant a et b : il y a en a $\binom{n-2}{p-2}$ (il reste $p-2$ éléments à choisir parmi $n-2$);
- contenant a mais pas b : il y en a $\binom{n-2}{p-1}$;
- contenant b mais pas a : il y en a $\binom{n-2}{p-1}$;
- ne contenant ni a, ni b : il y en a $\binom{n-2}{p}$.

Faisant la somme, on trouve bien la formule voulue.

4. On applique trois fois la relation du triangle de Pascal : une fois dans la première ligne, deux fois dans la deuxième :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \\ &= \binom{n-2}{p-2} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}\end{aligned}$$

ce qui après regroupement donne la formule voulue.

Exercice 7 :

1. C'est du cours! Il y en a exactement $\binom{14}{3}$.

2. Une fois le numéro k du plus grand chapitre choisi, il reste 2 chapitres à choisir parmi $k-1$: il y a donc exactement $\binom{k-1}{2}$ choix de chapitres dont le dernier porte le numéro k.

3. On réalise une partition de l'ensemble des parties à 3 éléments en fixant le plus grand élément valant de 3 à 14. On a donc

$$\binom{14}{3} = \sum_{k=3}^{14} \binom{k-1}{2}$$

ce qui est exactement le résultat demandé.

4. On part cette fois d'un livre comprenant $n+1$ chapitres et on en sélectionne $p+1$. Il y a $\binom{n+1}{p+1}$ choix possibles. On étudie ensuite le nombre de choix possibles où le plus grand des chapitres porte le numéro k, pour k allant de $p+1$ à $n+1$: il y en a $\binom{k-1}{p}$ (reste p chapitres à choisir parmi ceux numérotés de 1 à $k-1$). On a donc

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p+1}^{n+1} \binom{k-1}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Exercice 8 :

On va s'inspirer de la démonstration de la formule du triangle de Pascal. Soit E un ensemble ayant m éléments, et F une partie de E ayant q éléments. On cherche le nombre de parties de E ayant exactement p éléments.

- Une telle partie peut ne contenir aucun élément de F. Il y a exactement $\binom{m-q}{p}$ telles parties.
- Une telle partie peut contenir exactement un élément de F. On a $\binom{q}{1}$ choix pour cet élément, et $\binom{m-q}{p-1}$ choix pour les autres.
- Plus généralement on compte le nombre de parties à p éléments de E contenant exactement k éléments de F. Il y a $\binom{q}{k}$ possibilités pour choisir ces éléments de F, et $\binom{m-q}{p-k}$ possibilités pour choisir les autres éléments (ils sont $p-k$, à choisir parmi $m-q$). Le nombre de parties recherché dans ce cas est donc $\binom{q}{k} \times \binom{m-q}{p-k}$.

Faisant la somme pour k de 0 à q, on trouve la formule souhaitée. Remarquons que ce dénombrement fonctionne même si $p > m-q$, à condition d'utiliser la convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$.

Exercice 9 :

$\binom{2n}{n}$ est le nombre de parties à n éléments dans un ensemble à $2n$ éléments. Pour compter ce nombre de parties, on peut aussi diviser l'ensemble en deux sous-ensembles contenant chacun n éléments. Pour obtenir n éléments, on peut en prendre k dans le premier, ie $\binom{n}{k}$ choix, et $n-k$ dans le deuxième, soit $\binom{n}{n-k}$ choix. On a donc :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

puisque $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

On peut aussi démontrer ce résultat sans dénombrement en remarquant que $\binom{2n}{n}$ est le coefficient devant X^n du polynôme $(X+1)^{2n}$. On retrouve l'autre valeur en écrivant $(X+1)^{2n} = (X+1)^n(X+1)^n$ et en identifiant.