Correction kholles MP 14/03/2022

Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$,

$$E \iff y' = \frac{1}{x^2} y$$

Solution générale : $y(x) = C\mathrm{e}^{-1/x}$.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$.
y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ donc il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x > 0, y(x) = C^+\mathrm{e}^{-1/x} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = C^-\mathrm{e}^{-1/x}$$

Continuité en 0

$$y(x) \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} 0 \text{ et } y(x) \underset{x \to 0-}{\longrightarrow} \begin{cases} \pm\infty \text{ si } C^- \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Nécessairement $y(0) = 0$ et $C^- = 0$.
Dérivabilité en 0

$$y'(x) = \frac{C^+}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x} \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} 0 \text{ et } y'(x) \underset{x \to 0-}{\longrightarrow} 0 \text{ donc } y'(0) = 0$$

Equation différentielle en 0 : $0^2 y'(0) - y(0) = 0$: ok.
Finalement

$$\exists C \in \mathbb{R}, y(x) = \begin{cases} C\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Inversement une telle fonction est solution.

Solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$

$$y(x) = C\mathrm{sh}x - \mathrm{ch}x$$

Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = C\mathrm{sh}x - \mathrm{ch}x \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

(a) $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$,

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

La matrice A est diagonalisable, $P^{-1}AP = D$ avec

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $\mu_A = (X-2)(X+1)$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = -(X-2)(X^2-X+1)$.
La résolution complexe est alors facile puisque la matrice A est diagonalisable.
La résolution réelle est en revanche plus délicate à obtenir, détaillons-la :
$X_1 = {}^t(1,0,-1)$ est vecteur propre de A, complétons-le avec deux vecteurs d'un plan stable.
Les plans stables s'obtiennent en étudiant les éléments propres de ${}^tA$.
$\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}\,A = \{2\}$ et $E_2({}^tA) = \mathrm{Vect}\,{}^t(2,1,-1)$. Ainsi le plan d'équation $2x+y-z=0$ est stable par ${}^tA$.
Prenons $X_2 = {}^t(0,1,1)$ et $X_3 = AX_2 = {}^t(-1,2,0)$. On vérifie $AX_3 = X_3 - X_2$.
Ainsi pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.
Pour $X = {}^t(x,y,z)$ et $Y = {}^t(y_1,y_2,y_3) = P^{-1}X$, on a $X' = AX \iff Y' = BY$.
Ceci nous conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_2'' - y_2' + y_2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha \mathrm{e}^{2t} \\ y_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ y_3(t) = -y_2'(t) \end{cases}$$

Et on peut conclure via $X = PY$.

(a) Posons

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leq 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geq 1$.
Finalement $R = 1$.

(b) Posons $a_n = \sin n$.
(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leq 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geq 1$.
Finalement $R = 1$.

(c) Posons $a_n = (\sin n)/n^2$.
(a_n) est bornée donc $R \geq 1$.
Pour $|z| > 1$, la suite $\left(\frac{\sin n}{n^2}|z|^n\right)_{n\geq 1}$ ne tend pas vers 0 car la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0. On en déduit $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

(a) $\frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z^n + (-1)^n z^n) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}z^{2p}$.

(b) $\frac{1}{3}\left(f(z) + f(jz) + f(j^2z)\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(1 + j^n + j^{2n}\right)z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{3p}z^{3p}$.

Notons R' le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.
Pour $|z| < \sqrt{R}$, $|z^2| < R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est absolument convergente.
Pour $|z| > \sqrt{R}$, $|z^2| > R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est grossièrement divergente.
On en déduit $R' = \sqrt{R}$.

Soit $r \in]0\,;R[$. La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{a_n}{n!} z^n = a_n r^n \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n = \mathrm{o}\left(a_n r^n\right)$$

car par croissance comparée

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Par comparaison de séries absolument convergentes, on peut affirmer que la série numérique $\sum \frac{a_n z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Le rayon de convergence de la série entière étudiée est $+\infty$.

(a) $R = 1$.

(b) Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, on a

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^{n+1}$$

Après décalage d'indice et réunion des deux sommes

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) x^{n+1}$$

ce qui conduit à la relation demandée.

(c) Posons

$$g_n(x) = (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$

ce qui définit $g_n \colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue.
À l'aide du critère spécial des séries alternées, on montre que la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ ce qui assure que sa somme est continue. On en déduit par opérations sur les limites

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

(d) En regroupant les termes d'indices impairs et pairs consécutifs

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2n+1}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\right)^2\right)$$

Enfin par la formule du Wallis, on obtient

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}$$

(c) Pour $n \geq 2$, $a_n = \ln n - \ln(n-1) - 1/n$ donc

$$a_n x^n = \ln(n)x^n - \ln(n-1)x^n - \frac{1}{n}x^n$$

En sommant pour n allant de 2 à $+\infty$,

$$g(x) = (1-x)f(x) + \ln(1-x)$$

(d) Puisque $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$, la série $\sum |a_n|$ est convergente et donc la fonction g est définie et continue sur le segment $[-1\,;1]$. Par suite, la fonction g converge en 1^- et puisque le terme $\ln(1-x)$ diverge quand $x \to 1^-$, on obtient

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

(e) Puisque

$$f(x) = \frac{g(x) - \ln(1-x)}{1-x}$$

on obtient quand $x \to -1^+$,

$$f(x) \to \frac{g(-1) - \ln(2)}{2}$$

Il reste à calculer $g(-1)$ ...

$$g(-1) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\ln n - \ln(n-1)\right) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Or

$$1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

et en regroupant les termes pairs et impairs consécutifs

$$\sum_{n=2}^{2N+1} (-1)^n \left(\ln n - \ln(n-1)\right) = \sum_{p=1}^{N} 2\ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) - \ln(2N+1) = \ln\frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N+1)!(2N)!} \to$$

en vertu de la formule de Stirling.
Finalement

$$g(-1) = \ln\frac{\pi}{2} + \ln(2)$$

On en déduit

$$f(x) \xrightarrow[x\to -1^+]{} \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}$$

(a) 0, cf. lemme de Lebesgue.

(b) Posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégrale existe car un prolongement par continuité est possible en 0.
On observe

$$\sin(2(n+1)t) - \sin(2nt) = 2\sin t\cos(2n+1)t$$

et donc

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} 2\cos((2n+1)t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0$$

La suite (I_n) est constante égale à

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

(c) On a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt)f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$f(t) = \cot t - \frac{1}{t}$$

qui se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi/2]$.
Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t \to \frac{\pi}{2}$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$

donc la convergence de l'intégrale de Dirichlet étant supposée connue, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

(d) On a

$$\int_0^{\pi/2} \ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin\left((2n+1)t\right)}{\sin t}$ est continue sur $]0, \pi/2]$. Elle se prolonge par continuité en 0 par la valeur $2n+1$. Ainsi, il n'y a pas de problèmes de convergence en 0. Le raisonnement est identique pour la fonction $t \mapsto \frac{\sin\left((2n+1)t\right)}{t}$.

2. Il suffit de remarquer que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et que, pour tout entier $n \geq 1$, on a grâce à une formule de trigonométrie

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} 2\cos(2nt)dt = 0.$$

3. Ceci résulte d'une intégration par parties. En effet,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \phi(t)\sin\left((2n+1)t\right)dt = & -\frac{1}{2n+1}\Bigg(\phi(\pi/2)\cos\left((2n+1)\pi/2\right) - \phi(0) \\ & - \int_0^{\pi/2} \phi'(t)\cos\left((2n+1)t\right)dt.\Bigg)\end{aligned}$$

Puisque

$$\left|\int_0^{\pi/2} \phi'(t)\cos\left((2n+1)t\right)dt\right| \leq \int_0^{\pi/2} |\phi'(t)|dt,$$

on en déduit bien la convergence vers zéro souhaitée.

4. Il est facile de voir que $\phi(t) \sim_0 -\frac{t}{6}$, ce qui prouve que ϕ se prolonge par continuité en 0. De plus, on a

$$\phi'(t) = \frac{t^2\cos t - \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t}.$$

Pour t tendant vers 0, l'utilisation des développements limités prouve facilement que $\phi'(t)$ tend vers $-1/6$. Par le théorème de prolongement d'une dérivée, ceci prouve que ϕ définit une fonction C^1 sur $[0, \pi/2]$.

5. On a

$$I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \phi(t)\sin\left((2n+1)t\right)dt,$$

avec $\phi(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$. D'après les deux questions précédentes, on a bien $I_n - J_n \to 0$.

6. Ceci vient du changement de variables $u = (2n+1)t$:

$$J_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t}dt \to I.$$

7. On a $I = \lim_n J_n = \lim_n I_n = I_0 = \frac{\pi}{2}$.

(a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur $\mathbb{R}$. Les conditions initiales proposées déterminent alors une solution unique définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Puisque la fonction u est continue et $u(0) = 1$, la fonction u est strictement positive au voisinage de 0 et par la satisfaction de l'équation différentielle, on peut affirmer que u'' est strictement négative au voisinage de 0. La fonction u' étant alors strictement décroissante au voisinage de 0 et vérifiant $u'(0) = 0$, les existences de α et β sont assurées.
Par l'absurde, supposons que la fonction u ne s'annule par sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction u est alors positive et u'' est négative sur $\mathbb{R}_+$. La fonction u' étant donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall t \geq \beta, u'(t) \leq u'(\beta)$$

En intégrant

$$\forall x \geq \beta, u(x) - u(\beta) \leq u'(\beta)(x - \beta)$$

Or cette affirmation est incompatible avec un passage à la limite quand $x \to +\infty$.
On en déduit que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$ (et cette annulation est nécessairement sur $\mathbb{R}_+^*$)
De même, on justifie que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_-^*$ (et on peut même montrer que la fonction u est paire. . .)

(c) Considérons l'ensemble

$$A = \{t > 0 \mid u(t) = 0\}$$

C'est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure δ. Par la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite $(t_n) \in A^{\mathbb{N}}$, telle que

$$t_n \to \delta$$

Puisque $u(t_n) = 0$, on obtient à la limite $u(\delta) = 0$. Evidemment $\delta \geq 0$ et $\delta \neq 0$ donc $\delta \in A$ et ainsi δ est un minimum de A.
De même on obtient γ.

(d) Grâce à l'équation différentielle

$$W' = u''v - uv'' = 0$$

Le wronskien W est donc constant mais peu importe. . . puisque les solutions u et v sont indépendantes, le wronskien ne s'annule pas et il est donc de signe constant.
Or

$$W(\gamma) = u'(\gamma)v(\gamma) \text{ et } W(\delta) = u'(\delta)v(\delta)$$

Puisque u est strictement positive sur $]\gamma\,;\delta[$, u'' est strictement négative et u' strictement décroissante sur ce même intervalle. On en déduit

$$u'(\gamma) > 0 \text{ et } u'(\delta) < 0$$

ce qui entraîne que $v(\gamma)$ et $v(\delta)$ sont de signes stricts contraires. On en déduit que v s'annule sur $]\gamma\,;\delta[$.

(e) Plus généralement, qu'une solution de (E) soit colinéaire à u ou non, on peut affirmer que celle-ci possède un zéro dans $[\gamma\,;\delta]$. Or on vérifie que les fonctions w_n sont solutions de (E) et donc chacune possède au moins un zéro dans $[\gamma\,;\delta]$. On en déduit que la fonction w possède au moins un zéro dans chaque intervalle $[\gamma + n\pi\,;\delta + n\pi]$ ce qui assure l'existence d'une infinité de zéros.