Correction kholles MP 14/03/2022

Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$,

$$E \iff y' = \frac{1}{x^2}y$$

Solution générale : $y(x) = C\mathrm{e}^{-1/x}$.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$.
y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ donc il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x > 0, y(x) = C^+\mathrm{e}^{-1/x} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = C^-\mathrm{e}^{-1/x}$$

Continuité en 0

$$y(x) \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} 0 \text{ et } y(x) \underset{x\to 0-}{\longrightarrow} \begin{cases} \pm\infty \text{ si } C^- \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Nécessairement $y(0) = 0$ et $C^- = 0$.
Dérivabilité en 0

$$y'(x) = \frac{C^+}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x} \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} 0 \text{ et } y'(x) \underset{x\to 0-}{\longrightarrow} 0 \text{ donc } y'(0) = 0$$

Equation différentielle en 0 : $0^2y'(0) - y(0) = 0$: ok.
Finalement

$$\exists C \in \mathbb{R}, y(x) = \begin{cases} C\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Inversement une telle fonction est solution.

Solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$

$$y(x) = \frac{C + x}{\mathrm{e}^x - 1} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Soit y une fonction solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
Il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, y(x) = \frac{C^+ + x}{\mathrm{e}^x - 1} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = \frac{C^- + x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

Pour que la fonction y puisse être prolongée par continuité en 0, il faut $C^+ = C^- = 0$ auquel cas

$$y(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \text{ pour } x \neq 0$$

et la fonction se prolonge par $y(0) = 1$.
On vérifie que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car inverse d'une fonction développable en série entière.
De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\mathrm{e}^x - 1)\, y(x) = x$$

donne par dérivation, la vérification de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.
Finalement, il existe une seule solution sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \text{ prolongée par continuité avec } y(0) = 1$$

Solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$

$$y(x) = C\text{sh}x - \text{ch}x$$

Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = C\text{sh}x - \text{ch}x \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de solution homogène : $y(t) = (\lambda t + \mu)\text{e}^{-2t}$.
Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)t\text{e}^{-2t} + \mu(t)\text{e}^{-2t}$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t)t\text{e}^{-2t} + \mu'(t)\text{e}^{-2t} = 0 \\ \lambda'(t)(1-2t)\text{e}^{-2t} - 2\mu'(t)\text{e}^{-2t} = \frac{\text{e}^{-2t}}{1+t^2} \end{cases}$$

donne

$$\begin{cases} \lambda'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ \mu'(t) = \frac{-t}{1+t^2} \end{cases}$$

Les fonctions $\lambda(t) = \arctan t$ et $\mu(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ conviennent.
Finalement, la solution générale des l'équation étudiée est :

$$y(t) = t\arctan(t)\text{e}^{-2t} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\text{e}^{-2t} + (\lambda t + \mu)\text{e}^{-2t}$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de solution homogène : $y = \lambda\cos t + \mu\sin t$.
Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0 \\ -\lambda'(t)\sin t + \mu'(t)\cos t = \tan t \end{cases}, \begin{cases} \lambda'(t) = -\sin^2 t/\cos t \\ \mu'(t) = \sin t \end{cases}$$

Les fonctions

$$\lambda(t) = \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t}\,\text{d}t = \sin t - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$$

et

$$\mu(t) = -\cos t$$

conviennent car

$$\int \frac{1}{\cos t}\,\text{d}t = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,\text{d}t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}.$$

Finalement, la solution générale de l'équation étudiée est :

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cos t\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \lambda\cos t + \mu\sin t$$

sur $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène : $y = A\cos x + B\sin x$.
Méthode de variation des constantes

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = \cot x \end{cases}$$

Après résolution et intégration

$$y(x) = -\frac{1}{2}\sin x \ln \frac{1+\cos x}{1-\cos x} + A\cos x + B\sin x$$

$\chi_A = X^3 - 2X$, $\pi_A = \chi_A$. On a donc

$$A^3 = 2A, A^{2k+1} = 2^k A \text{ et } A^{2k+2} = 2^k A^2 \text{ pour } k > 0$$

avec

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\exp(A) = I_3 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!} A + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{(2k)!} A^2 = I_3 + \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} A + \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(\sqrt{2}) - 1)A^2.$$

$\chi_A = X(X^2+1)$, $\pi_A = X(X^2+1)$, $\exp(A)\exp({}^tA) = \exp(A)\exp(-A) = I_3$.
En calculant $A^2, A^3, \ldots$ on obtient

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 1 & -\sin 1 \\ 0 & \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

(a) $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$,

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

La matrice A est diagonalisable, $P^{-1}AP = D$ avec

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $\mu_A = (X-2)(X+1)$.

(b) Ci-dessus.

(c) Par division euclidienne $X^n = (X+1)(X-2)Q(X) + \alpha X + \beta$ avec

$$\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

donc

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} I_3$$

puis

$$\mathrm{e}^A = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-1}}{3} A + \frac{2\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^2}{3} I_3.$$

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 d'équation matricielle $X' = AX + B(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{5, -3\}$, $E_5(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pour $Y = P^{-1}X$ est solution de $Y' = DY + C(t)$ avec

$$C(t) = P^{-1}B(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-3t} \\ -\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Après résolution, on obtient

$$Y' = DY + C(t) \iff Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{5t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^t - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t} \\ \mu \mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

puis

$$X' = AX + B(t) \iff X(t) = \lambda\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{5t} \\ \mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3t} \\ -\frac{1}{8}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}.$$

On peut aussi procéder par variation des constantes après résolution séparée de l'équation homogène.

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$\chi_A(X) = -X^2(X+1)$.
Après triangularisation, on a $A = PTP^{-1}$ pour

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $Y = P^{-1}X$, $X' = AX \iff Y' = TY$.

$$Y' = TY \iff Y = \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} \\ \mu t + \nu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}.$$

La solution générale du système est donc

$$X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}.$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = -(X-2)(X^2 - X + 1)$.
La résolution complexe est alors facile puisque la matrice A est diagonalisable.
La résolution réelle est en revanche plus délicate à obtenir, détaillons-la :
$X_1 = {}^t(1, 0, -1)$ est vecteur propre de A, complétons-le avec deux vecteurs d'un plan stable.
Les plans stables s'obtiennent en étudiant les éléments propres de ${}^tA$.
$\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}\, A = \{2\}$ et $E_2({}^tA) = \mathrm{Vect}\, {}^t(2, 1, -1)$. Ainsi le plan d'équation $2x + y - z = 0$ est stable par ${}^tA$.
Prenons $X_2 = {}^t(0, 1, 1)$ et $X_3 = AX_2 = {}^t(-1, 2, 0)$. On vérifie $AX_3 = X_3 - X_2$.
Ainsi pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.
Pour $X = {}^t(x, y, z)$ et $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3) = P^{-1}X$, on a $X' = AX \iff Y' = BY$.
Ceci nous conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_2'' - y_2' + y_2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{2t} \\ y_2(t) = e^{\frac{1}{2}t}(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ y_3(t) = -y_2'(t) \end{cases}$$

Et on peut conclure via $X = PY$.

(a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur $\mathbb{R}$. Les conditions initiales proposées déterminent alors une solution unique définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Puisque la fonction u est continue et $u(0) = 1$, la fonction u est strictement positive au voisinage de 0 et par la satisfaction de l'équation différentielle, on peut affirmer que u'' est strictement négative au voisinage de 0. La fonction u' étant alors strictement décroissante au voisinage de 0 et vérifiant $u'(0) = 0$, les existences de α et β sont assurées.
Par l'absurde, supposons que la fonction u ne s'annule par sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction u est alors positive et u'' est négative sur $\mathbb{R}_+$. La fonction u' étant donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall t \geq \beta, u'(t) \leq u'(\beta)$$

En intégrant

$$\forall x \geq \beta, u(x) - u(\beta) \leq u'(\beta)(x - \beta)$$

Or cette affirmation est incompatible avec un passage à la limite quand $x \to +\infty$.
On en déduit que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$ (et cette annulation est nécessairement sur $\mathbb{R}_+^*$)
De même, on justifie que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_-^*$ (et on peut même montrer que la fonction u est paire...)

(c) Considérons l'ensemble

$$A = \{t > 0 \mid u(t) = 0\}$$

C'est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure δ. Par la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite $(t_n) \in A^{\mathbb{N}}$, telle que

$$t_n \to \delta$$

Puisque $u(t_n) = 0$, on obtient à la limite $u(\delta) = 0$. Evidemment $\delta \geq 0$ et $\delta \neq 0$ donc $\delta \in A$ et ainsi δ est un minimum de A.
De même on obtient γ.

(d) Grâce à l'équation différentielle

$$W' = u''v - uv'' = 0$$

Le wronskien W est donc constant mais peu importe... puisque les solutions u et v sont indépendantes, le wronskien ne s'annule pas et il est donc de signe constant.
Or

$$W(\gamma) = u'(\gamma)v(\gamma) \text{ et } W(\delta) = u'(\delta)v(\delta)$$

Puisque u est strictement positive sur $]\gamma\,;\delta[$, u'' est strictement négative et u' strictement décroissante sur ce même intervalle. On en déduit

$$u'(\gamma) > 0 \text{ et } u'(\delta) < 0$$

ce qui entraîne que $v(\gamma)$ et $v(\delta)$ sont de signes stricts contraires. On en déduit que v s'annule sur $]\gamma\,;\delta[$.

(e) Plus généralement, qu'une solution de (E) soit colinéaire à u ou non, on peut affirmer que celle-ci possède un zéro dans $[\gamma\,;\delta]$. Or on vérifie que les fonctions w_n sont solutions de (E) et donc chacune possède au moins un zéro dans $[\gamma\,;\delta]$. On en déduit que la fonction w possède au moins un zéro dans chaque intervalle $[\gamma + n\pi\,;\delta + n\pi]$ ce qui assure l'existence d'une infinité de zéros.