Correction des khôlles ecs 2 du 28/09/2021.

Kholle A :

1) u est diagonalisable ssi $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$ ssi $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E)$

2) On cherche les λ tq $A - \lambda I$ soit non inversible.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\lambda \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2-\lambda & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2+2L_1 \\ L_3+(2+\lambda)L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\lambda \\ 0 & -3-\lambda & -6-2\lambda \\ 0 & -6-2\lambda & 1-(2+\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3-2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\lambda \\ 0 & -3-\lambda & -6-2\lambda \\ 0 & 0 & 1-(2+\lambda)^2+2(6+2\lambda) \end{pmatrix}$$

$$1-(2+\lambda)^2+2(6+2\lambda) = 1-4-4\lambda-\lambda^2+12+\cancel{4\lambda}$$
$$= 9-\lambda^2 = (3-\lambda)(3+\lambda)$$

Ainsi $A - \lambda I$ est inversible ssi $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -3$.

Donc $Sp(A) = \{-3 ; 3\}$

Cherchons E_{-3} :

On cherche donc $X = {}^t(x, y, z)$ tq $AX = -3X$

càd $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \iff x - 2y + z = 0 \iff x = 2y - z$

D'où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-3}$ ssi $X = \begin{pmatrix} 2y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z$

Donc $E_{-3} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Cherche E_3 :

$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_3$ ssi $AX=3X$ ssi $\begin{cases}-5x-2y+z=0\\-2x-2y-2z=0\\x-2y-5z=0\end{cases}$ ssi $\begin{cases}x+y+z=0\\x-2y-5z=0\\-5x-2y+z=0\end{cases}$

ssi $\begin{array}{l}\\L_2-L_1\\L_3+5L_1\end{array}\begin{cases}x+y+z=0\\-3y-6z=0\\3y+6z=0\end{cases}$ ssi $\begin{cases}x=z\\y=-2z\end{cases}$

D'où $E_3=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

Comme $\dim(E_3)+\dim(E_{-3})=3=\dim(E)$
alors A est diagonalisable et $A=PDP^{-1}$
avec $D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$

3) a) i) On trouve $A^2=\begin{pmatrix}4&4&0\\-4&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $A^3=O_3$

ii) Si A était inversible alors $A^3=O_3 \Rightarrow A^2=O_3A^{-1}=O_3$ $\lightning$

Donc A n'est pas inversible.

De plus, si A admettait une valeur propre λ non nulle alors $\exists X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$
tq $AX=\lambda X$ d'où $A(A(AX))=A^3X=A(A(\lambda X))$
$=A(\lambda^2X)=\lambda^3X$

Mais $A^3X=O_3X=0$ D'où $\lambda^3=0$ ou $\underbrace{X=0}_{\text{impossible}}$ donc $\lambda=0$

iii) Cherchons $V_0=E_0=\mathrm{Ker}(A)$:

$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(A)$ ssi $\begin{cases}x+y-2z=0\\-x-y+2z=0\\-2x-2y=0\end{cases}$ ssi $\begin{cases}x+y-2z=0\\x+y=0\end{cases}$ ssi $\begin{cases}z=0\\x=-y\end{cases}$

Ainsi $\ker(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ donc A n'est pas diagonalisable.

b) i) On trouve facilement $M(a)M(b) = M(a+b) \in E$.

ii) $M(0) = 1 = M(a)M(-a)$ donc $M(a) \in GL_3(\mathbb{R})$ et $M(a)^{-1} = M(-a)$.

c) i) Soit X un v.p. de A associé à la vap λ :

Ainsi $AX = \lambda X$ donc $M(a)X = X + 2a\lambda X + 2a^2\lambda^2 X$

$= (1 + 2a\lambda + 2a^2\lambda^2)X$

Donc X vp de $M(a)$ associé à la vap $1 + 2a\lambda + 2a^2\lambda^2$.

ii) $(M(a) - I)^3 = (2aA + 2a^2A^2)^3 = 8a^3A^3 + 24a^4A^4 + 24a^5A^5 + 8a^6A^6 = 0$

$(= A^3(2aI + 2a^2A) = 0)$

iii) Ainsi $M(a)$ est annulée par le polynôme $(X-1)^3$ donc $Sp(M(a)) \subset \{1\}$

Si $M(a)$ était diagonalisable alors $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$ tq

$M(a) = PIP^{-1} = I$

Ce qui est absurde car alors $\begin{pmatrix} 1+4a & 1+4a & -2 \\ -1+4a & -1-4a & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 0$ comme $a \neq 0$

Donc $M(a)$ n'est pas diagonalisable.

Kholle B :

1) a) On cherche λ tq $A - \lambda I \notin GL_2(\mathbb{R})$

Or $A - \lambda I \notin GL_2(\mathbb{R})$ ssi $(7-\lambda)(1-\lambda) - 2\times(-4) = 0$

ssi $7 - 8\lambda + \lambda^2 + 8 = 0$

ssi $15 - 8\lambda + \lambda^2 = 0$ ssi $\lambda = 3$ ou $\lambda = 5$

$Sp(A) = \{3, 5\}$

$E_3 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\}$

car $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in E_3$ ssi $AX = 3X$ ssi $\begin{cases}7x+2y=3x\\-4x+y=3y\end{cases}$ ssi $\begin{cases}4x+2y=0\\-4x-2y=0\end{cases}$

ssi $y=-2x$

ssi $X=\begin{pmatrix}x\\-2x\end{pmatrix}$

$E_5 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

car $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in E_5$ ssi $\begin{cases}2x+2y=0\\-4x-4y=0\end{cases}$ ssi $x=-y$ ssi $X=\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix}$

b) Ainsi comme A a 2 vp et $\dim(\mathbb{R}^2)=2$ alors A est diagonalisable et $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}3&0\\0&5\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}$.

c) Donc $A^n = PD^nP^{-1}$ (récurrence triviale)

$$= \begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= \begin{pmatrix}3^n&5^n\\-2\times3^n&-5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3^n+2\times5^n & -3^n+5^n\\ 2\times3^n-2\times5^n & 2\times3^n-5^n\end{pmatrix}.$$

2) A est diagonalisable ssi $\exists (P,D) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \underset{\substack{\uparrow\\\text{diagonales}}}{D_n(\mathbb{R})}$ tq $A = PDP^{-1}$.

$(A \in M_n(\mathbb{R}))$

3) On diagonalise A :

On trouve $Sp(A) = \{2,1,0\}$ (méthode identique à la ~~b~~ 1) A)

et $E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

$E_0 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$E_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}\right\}$

Ainsi $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On inverse la matrice P^{-1} : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1/2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Ainsi comme $A^n = PD^nP^{-1}$, on trouve $A^n = \begin{pmatrix} 3\times 2^n - 4 & -4\times 2^n + 8 & 12\times 2^n - 20 \\ \frac{3}{2}\times 2^n & -2\times 2^n & 6\times 2^n \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$\forall n > 0$.

4) Il faut donc montrer que $g^2 - 2g + id = 0$

c-à-d $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $g^2(M) - 2g(M) + M = 0$

c-à-d $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $g(M) + tr(g(M))J - 2(M + tr(M)J) + M = 0$

______, $M + tr(M)J + tr(M + tr(M)J)J - 2M - 2tr(M)J + M = 0$

______, $-tr(M)J + (tr(M) + tr(M)tr(J))J = 0$

______, $\underbrace{-tr(M)J + (tr(M))J = 0}_{\text{Vraie}}$

Mais $Sp(g) \subset \{1\}$ car $X^2 - 2X + 1 = 0$ ssi $X = 1$.

Or cela signifierait, si g était diagonalisable, $g = id$ (car $Mat_B(g) = PIP^{-1} = I$ $= Mat_B(g)$).

Donc $g(M) = M$ $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$ donc $tr(M)J = 0$ $\forall M \in \mathbb{R}$

donc $tr(M) = 0$ $\forall M \in \mathbb{R}$

ce qui est absurde.

Ainsi g n'est pas diagonalisable.

Kholle C :

1) a) Il suffit de vérifier $A^3+A^2-2A=0$

b) Ainsi, comme $X^3+X^2-2X=X(X^2+X-2)$
$=X(X-1)(X+2)$

, alors $Sp(A)\subset\{-2,0,1\}$

Regardons les espaces propres :

$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-2}$ ssi $\begin{cases}2x+z=0\\2y-z=0\\x-y+z=0\end{cases}$ ssi $\begin{cases}x-y+z=0\\2x+z=0\\2y-z=0\end{cases}$ ssi $\begin{cases}x-y+z=0\\2y-z=0\\2y-z=0\end{cases}$

ssi $\begin{cases}z=2y\\x=y-z=-y\end{cases}$ ssi $X=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}y$

D'où $E_{-2}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

On trouve de m : $E_0=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ et $E_1=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

c) Ainsi $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}$,

2) 1) Si $\exists x\in E\setminus\{0\}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ tq $u(x)=\lambda x$ alors on dit que λ est vap de u et que x est vp associé à λ.

2) $q(X)={}^tX{}^tAAX+{}^tXA{}^tAX={}^t(AX)(AX)+{}^t({}^tAX)({}^tAX)$

Or $\forall Y\in M_{n1}(\mathbb{R})$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$, ${}^tYY=\sum_{i=0}^{n}y_i^2\geq 0$

(et ${}^tYY=0$ ssi $y_i=0$ $\forall i\in[\![1;n]\!]$ ssi $Y=0$)

(propriété $*$)

Ainsi $q(X) \geq 0$ et donc comme $q(X) = {}^tX k X = k({}^tXX) \geq 0$

alors, comme $\underbrace{{}^tXX \geq 0}_{(cf\ *)}$, $k \geq 0$.

3) Si $k = 0$ alors ${}^tAA + A{}^tA = 0$

Méthode 1 : donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$q(X) = 0$ donc

$$\underbrace{{}^t(AX)(AX)}_{\in \mathbb{R}_+} + \underbrace{{}^t({}^tAX)({}^tAX)}_{\in \mathbb{R}_+} = 0$$

donc ${}^t(AX)(AX) = 0$

donc $AX = 0$ (cf $*$)

Comme $AX = 0$ $\underline{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

alors $A = 0$

Méthode 2 :

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

alors ${}^tAA = (b_{ij})_{i,j}$

avec $b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$

et si $A{}^tA = (c_{ij})_{i,j}$ alors

$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$

D'où si ${}^tAA + A{}^tA = 0$

alors $\forall i \in [\![1;n]\!]$

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 + a_{k,i}^2 = 0$ D'où

$\forall k \in [\![1;n]\!]$ $a_{i,k} = a_{k,i} = 0$

---

4) Soit $X \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}({}^tA)$

alors $AX = {}^tAX = 0$

Ainsi ${}^tAAX = 0$

et $A{}^tAX = 0$

D'où $kIX = kX = 0$

D'où $X = 0$

Ainsi $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}({}^tA) = \{0_{n,1}\}$

D'où $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$

car si $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ alors $f(x) = g(x) = 0$ et donc $\mathrm{Mat}_\mathcal{E} f(x) = AX = 0$

(Si $X = \mathrm{Mat}_\mathcal{E}\, x$) et $\mathrm{Mat}_\mathcal{E}\, g(x) = {}^tAX = 0$

5) a) On a $BX = \lambda X$ càd ${}^tAAX = \lambda X$

donc ${}^tX{}^tAAX = \lambda {}^tXX$

d'où $\underbrace{{}^t(AX)AX}_{\in \mathbb{R}_+} = \lambda \underbrace{({}^tXX)}_{\in \mathbb{R}_+}$

D'où $\lambda \geq 0$

b) Comme ${}^tAAX = \lambda X$ alors $(-A{}^tAX + kIX) = \lambda X$

d'où $A{}^tAX = (-\lambda + k)X$

D'où X vp associé à $k - \lambda$ (associé à $A{}^tA$)

Or par la m̂ idée que a) les vap de $A{}^tA$ sont ≥ 0

D'où $k - \lambda \geq 0$ donc $k \geq \lambda$.

c) $BAX = {}^tAAAX = (kI - A{}^tA)AX = kAX - A{}^tAAX$
$= kAX - A\lambda X = AX\underbrace{(k-\lambda)}_{=\mu}$

$B{}^tAX = {}^tAA{}^tAX = {}^tA\mu X = \mu {}^tAX$

d) Soit $\varphi : E_\lambda \longrightarrow E_\mu$, $X \longmapsto AX$. φ est clairement linéaire.

Montrons $\ker(\varphi) = \{0\}$: soit X tq $AX = 0$, $X \in E_\lambda$, alors ${}^tAAX = 0$ et donc $\lambda X = 0$. Donc, comme $\lambda \neq 0$, $X = 0$

Ainsi φ est injective.

Soit $Y \in E_\mu$ alors ${}^tAAY = (k - \lambda)Y$

D'où $({}^tAA - kI)Y = -\lambda Y$

donc $A{}^tAY = \lambda Y$

donc $A\left(\dfrac{{}^tAY}{\lambda}\right) = Y$ donc $\varphi\left(\dfrac{{}^tAY}{\lambda}\right) = Y$

D'où Y a un antécédent dans E_λ et donc φ est bijective.

Or $\dfrac{B{}^tAY}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}{}^tAA{}^tAY = \dfrac{1}{\lambda}\ \lambda\, {}^tAY = \lambda \times \dfrac{{}^tAY}{\lambda}$

↑ car si Y vp associé à μ et B alors par c) ${}^tAY$ est vp associé à $k - \mu = \lambda$.
$(\mu \in]0;k[)$