Puisque la fonction g est strictement croissante, les événement $|X| \geq a$ et $g(|X|) \geq g(a)$ sont identiques. Or l'inégalité de Markov donne

$$\mathrm{E}\left(g(|X)|\right) \geq g(a)\mathrm{P}\left(g(|X|) \geq g(a)\right)$$

et donc

$$\mathrm{P}\left(|X| \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{E}\left(g(|X|)\right)}{g(a)}$$

Rappelons

$$\mathrm{E}(X) = np \text{ et } \mathrm{V}(X) = np(1-p)$$

Considérons la variable aléatoire

$$Y = X - np = X - \mathrm{E}(X)$$

Par l'inégalité de Markov

$$\mathrm{P}\left(|Y| \geq na\right) \leq \frac{\mathrm{E}(|Y|)}{n\varepsilon}$$

donc

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{E}(|Y|)}{n\varepsilon}$$

Or $\mathrm{E}(|Y|) \leq \sqrt{\mathrm{E}(Y^2)}$ avec $\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{V}(X) = np(1-p)$ donc

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$$

Par stricte croissance de l'exponentiel, l'événement $X - np > n\varepsilon$ équivaut à l'événement

$$\exp\left(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right) \geq 1$$

L'inégalité de Markov appliquée à la variable $Y = \exp\left(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right)$ permet alors de conclure

$$\mathrm{P}\left(\exp\left(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right) \geq 1\right) \leq \frac{\mathrm{E}\left(\exp\left(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right)\right)}{1}$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathrm{P}\left(|X - \mu| \geq \alpha\sigma\right) < \frac{\sigma^2}{(\alpha\sigma^2)} = \frac{1}{\alpha^2}$$

On conclut par considération d'évènement complémentaire.

On a

$$\mathrm{E}(Y) = \alpha^2 \mathrm{E}\left((X-\mu)^2\right) + 2\alpha \mathrm{E}(X-\mu) + \sigma^2 = (\alpha^2+1)\sigma^2$$

L'inégalité de Markov appliquée à la variable positive Y donne

$$\mathrm{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(Y)}{a}$$

Pour $a = \sigma^2(\alpha^2+1)^2$,

$$\mathrm{P}(Y \geq a) \leq \frac{1}{1+\alpha^2}$$

Or

$$(X \geq \mu + \alpha\sigma) = \left(\alpha(X-\mu) + \sigma \geq (\alpha^2+1)\sigma\right)$$

et donc

$$(X \geq \mu + \alpha\sigma) \subset (Y \geq a)$$

puis

$$\mathrm{P}\left(X \geq \mu + \alpha\sigma\right) \leq \frac{1}{1+\alpha^2}$$

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace probabilisé.

1. a) Question de cours.

   b) $\{\emptyset, \mathbb{N}\}$, $\{\emptyset, \{0\}, \mathbb{N}^*, \mathbb{N}\}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

2. a) Soit $\omega \in \Omega$. Par définition d'une limite :

$$\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq k,\ |X_n(\omega)| < \varepsilon$$

ce qui équivaut à $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \exists k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq k,\ |X_n(\omega)| < \dfrac{1}{p}$, c'est-à-dire à $\omega \in C$.

   b) Tous les ensembles $\left[|X_n| < \frac{1}{p}\right]$ étant des éléments de $\mathcal{A}$ puisque les X_n sont des variables aléatoires sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, C est un élément de $\mathcal{A}$, par stabilité de cette tribu par réunions et intersections dénombrables.

3. a) Soit $\varepsilon > 0$. Si ω est un élément de C, on a, par définition d'une limite,

$$\exists k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq k,\ |X_n(\omega)| < \varepsilon$$

ce qui signifie que ω appartient à $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}\Big(\bigcap_{n\geq k}\left[|X_n| < \epsilon\right]\Big)$.

On a donc l'inclusion $C \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}\Big(\bigcap_{n\geq k}\left[|X_n| < \epsilon\right]\Big)$ qui fournit, par passage aux événements contraires : $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{n\geq k}\left[|X_n| \geq \varepsilon\right] \subset \overline{C}$.

   b) On suppose que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 (i.e. $P(\overline{C}) = 0$).
Soit $\varepsilon > 0$.
De l'inclusion de 3.a, on déduit que la probabilité de l'événement $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{n\geq k}\left[|X_n| \geq \varepsilon\right]$ est nulle.

Comme les événements $A_k = \displaystyle\bigcup_{n\geq k}\left[|X_n| \geq \varepsilon\right]$ forment une suite décroissante, la propriété de limite monotone permet d'en déduire que : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} P(A_k) = P\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\Big) = 0$.

Des inclusions $\left[|X_k| \geq \varepsilon\right] \subset A_k$, on en déduit ensuite que : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} P\Big(\left[|X_k| \geq \varepsilon\right]\Big) = 0$.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc bien en probabilité vers 0.

4. a) $P\Big(\left[|X_n| \geq \varepsilon\right]\Big) \leq P\Big(\left[|X_n| \geq \min\{\varepsilon, 1\}\right]\Big) = P([X_n = 1]) = \dfrac{1}{n^\alpha}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

b) $p_N = P\Big(\bigcap_{n=k}^{k+N} [|X_n| < \frac{1}{p}]\Big) = \prod_{n=k}^{k+N} (1 - \frac{1}{n^\alpha})$.

• Si $\alpha = 1$

$$p_N = \prod_{n=k}^{k+N} (\frac{n-1}{n}) = \frac{k-1}{k+N}$$

qui tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

• Si $\alpha < 1$, les inégalités $\prod_{n=k}^{k+N} (1 - \frac{1}{n^\alpha}) \le \prod_{n=k}^{k+N} (1 - \frac{1}{n})$ prouvent que p_N tend aussi vers 0 quand N tend vers l'infini.

• Si $\alpha > 1$, la série de terme général $\ln\big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big)$ est convergente (par comparaison à la série de Riemann $1/n^\alpha$).

Finalement : $\lim_{N \to +\infty} p_N = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \le 1 \\ \exp\Big(\sum_{n=k}^{+\infty} \ln\big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big)\Big) & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$.

c)

• Si $\alpha \le 1$, $P\Big(\bigcap_{n=k}^{+\infty} [|X_n| < \frac{1}{p}]\Big) = \lim_{N \to +\infty} P\Big(\bigcap_{n=k}^{k+N} [|X_n| < \frac{1}{p}]\Big) = 0$.

Par limite monotone, on en déduit $P\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n=k}^{+\infty} [|X_n| < \frac{1}{p}]\Big) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, puis

$$P(C) = 0$$

ce qui prouve que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas presque sûrement vers 0.

• Si $\alpha > 1$, le reste $\sum_{n=k}^{+\infty} \ln\big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big)$, de la série convergente de terme général $\ln\big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big)$, tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

Par limites monotones, on en déduit $P\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n=k}^{+\infty} [|X_n| < \frac{1}{p}]\Big) = 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, puis

$$P(C) = 1$$

ce qui prouve que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0.

1. a) $\boxed{\text{Question de cours : inégalité de Markov.}}$

Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout réel c strictement positif : $\boxed{P([X \geqslant c]) \leqslant \dfrac{E(X)}{c}}$.

b) Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

i) Pour tout réel strictement positif b, justifier l'inégalité :

$$\boxed{P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E((X - E(X) + b)^2)}{(a+b)^2}}.$$

Soit $b > 0$.

$$P([X \geq E(X) + a]) = P([X - E(X) + b \geq a + b]) \leq P([(X - E(X) + b)^2 \geq (a+b)^2])$$

d'où, grâce à l'inégalité de Markov :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E((X - E(X) + b)^2)}{(a+b)^2}.$$

ii) En appliquant le résultat précédent à $b = V(X)/a$, établir l'inégalité :

$$\boxed{P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2}}.$$

Pour $b = V(X)/a$, on obtient :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E\big((X - E(X) + V(X)/a)^2\big)}{(a + V(X)/a)^2} = \frac{V(X) + \big(V(X)\big)^2/a^2}{a^2(1 + V(X)/a^2)^2} = \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

2. On appelle *médiane* de X tout nombre réel m tel que $P([X \leq m]) = \dfrac{1}{2}$.

a) $\boxed{\text{Justifier que } X \text{ admet au moins une médiane et que l'ensemble des médianes de } X \text{ est un segment de } \mathbb{R}.}$

La fonction de répartition $F : x \longmapsto P([X \leq x])$ étant continue sur $\mathbb{R}$ (puisque X est une variable aléatoire à densité), de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que, pour tout réel y strictement compris entre 0 et 1, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

En particulier, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $P([X \leq m]) = \dfrac{1}{2}$.

Soit I l'ensemble (non vide) des réels x tels que $F(x) = \dfrac{1}{2}$.

• I est un *intervalle*, parce que, quels que soient $(a,b) \in I^2$, tous les réels x compris entre a et b appartiennent à I (puisque la fonction croissante F prend la même valeur en a et en b).

• $I = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) = 1/2\}$ est une partie *fermée* de $\mathbb{R}$, puisque F est continue.

• I est une partie *bornée* de $\mathbb{R}$, puisque, par exemple, pour q_1 et q_3 choisis tels que $F(q_1) = 1/4$ et $F(q_3) = 3/4$, l'intervalle I est inclus dans $]q_1, q_3[$, donc borné.

Par conséquent, I est un *segment* (intervalle fermé borné) de $\mathbb{R}$.

b) Dans cette question, on note m une médiane de X et on suppose que m est supérieure ou égale à $E(X)$. On note $\sigma(X)$ l'écart-type de X.

Déduire de l'inégalité prouvée en 1.b.ii, appliquée à $a = m - E(X)$, que $m - E(X)$ est inférieur ou égal à $\sigma(X)$.

Par application de l'inégalité 1.b.ii, appliquée à $a = m - E(X)$, on obtient

$$\frac{1}{2} = P([X \geq m]) \leq \frac{V(X)}{V(X) + \big(m - E(X)\big)^2}$$

d'où $V(X) + \big(m - E(X)\big)^2 \leq 2\,V(X)$, puis : $\boxed{m - E(X) \leq \sigma(X)}$.

c) Justifier que toute médiane m de X vérifie l'inégalité : $\dfrac{|m - E(X)|}{\sigma(X)} \leq 1$.

D'après ce qui précède, l'inégalité demandée est vraie lorsque $m \geq E(X)$ ($\sigma(X)$ est strictement positif, puisque la variable aléatoire X possède une densité).
Dans le cas où $m \leq E(X)$, il suffit d'appliquer le résultat précédent à la variable aléatoire $-X$, dont $-m$ est une médiane, pour obtenir l'inégalité demandée.

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note X_n une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/n \\ n/2 & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ 1/\big(2(n-1)\big) & \text{si } 0 \leq x < 1 - 1/n \\ (n-1)/2 & \text{si } 1 - 1/n \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

a) Trouver l'unique médiane de X_n.

La fonction de répartition F_n de X_n est donnée par : [1]

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/n \\ (nx+1)/2 & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ 1/2 + x/\big(2(n-1)\big) & \text{si } 0 \leq x < 1 - 1/n \\ 1 + (n-1)(x-1)/2 & \text{si } 1 - 1/n \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

L'unique médiane m_n de X_n est 0.

b) Justifier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

• Pour tout $x < 0$, $F_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, puisque, pour n assez grand, on a $x < -1/n$ (d'où $F_n(x) = 0$).

• Pour tout $x \in [0, 1[$, $F_n(x)$ tend vers $1/2$ quand n tend vers l'infini, puisque, pour n assez grand, on a $0 \leq x < -1/n$ (d'où $F_n(x) = 1/2 + x/(2(n-1))$, qui tend vers $1/2$ quand n tend vers l'infini).

• Pour tout $x \geq 1$, $F_n(x) = 1$.

En résumé, quand n tend vers l'infini, $F_n(x) \longrightarrow G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc en loi vers une (toute) variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. [2]

c) Quelle propriété du majorant trouvé en 2.c peut-on déduire des limites de $E(X_n)$ et $V(X_n)$ quand n tend vers l'infini ?

La limite en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ permet de faire la conjecture que $E(X_n)$ et $V(X_n)$ tendent respectivement vers $1/2$ et $1/4$ quand n tend vers l'infini. Une fois établies ces convergences, on pourra affirmer

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{|m_n - E(X_n)|}{\sigma(X_n)} = 1}$$

ce qui prouvera que le majorant trouvé en 2.c est optimal.

Pour déterminer effectivement les limites des moments des X_n, une méthode efficace consiste à écrire la densité f_n comme la moyenne pondérée de trois densités de lois uniformes, dont l'espérance et la variance sont connues :

$$f_n = \frac{1}{2}\, g_n + \frac{1}{2n}\, h_n + \frac{(n-1)}{2n}\, k_n$$

où g_n, h_n et k_n sont des densités respectives des lois uniformes sur $[-1/n, 0]$, $[0, 1-1/n]$ et $[1-1/n, 1]$.

On déduit de cette décomposition les expressions de $E(X_n)$ et $E({X_n}^2)$, et leurs limites.

$$E(X_n) = \frac{1}{2}\,(\frac{-1}{2n}) + \frac{1}{2n}\,(\frac{n-1}{2n}) + \frac{(n-1)}{2n}\,(\frac{2n-1}{2n})$$

tend vers $1/2$ quand n tend vers l'infini.

De même, comme les espérances des carrés des trois lois uniformes de la décomposition tendent respectivement vers 0, $1/3$ et 1, leur moyenne pondérée par les coefficients $1/2$, $1/(2n)$ et $(n-1)/(2n)$, qui est égale à $E({X_n}^2)$, tend vers $1/2$ quand n tend vers l'infini. On a donc bien :

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma(X_n) = \sqrt{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\ .$$

Finalement, la borne supérieure des quotients $\dfrac{|m - E(X)|}{\sigma(X)}$ pour les variables aléatoires X à densité possédant un moment d'ordre deux est bien égale à 1. Il n'existe pas de majorant strictement plus petit de tous ces quotients.