Correction kholles ECS 2 : 08/03/2022
Fonctions de plusieurs variables réelles.

Kholle A :

1. Question de cours : programme ECS2 2014 p. 19.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{R}^n \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ car elle est polynomiale. Un calcul immédiat donne :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \partial_i f(x_1, \ldots, x_n) = 2x_i + 2\sum_{k=1}^{n} x_k - 1 = 4x_i + 2\sum_{k \neq i} x_k - 1}$$

puis

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad \partial_{i,j}^2 f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 4 & \text{si } j = i \\ 2 & \text{si } i \neq j \end{cases}}$$

3. (a) Le point $(a_1, \ldots, a_n)$ est un point critique de f si et seulement si $\partial_i f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Le n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ est donc solution du système linéaire dont la matrice augmentée est :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & \ldots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \ldots & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant successivement pour i variant de 1 à $n-1$, les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$, on trouve $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ puis la dernière équation donne $a_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$.

Finalement l'unique point critique de f est :

$$\boxed{(a_1, \ldots, a_n) = \left(\frac{1}{2(n+1)}, \ldots, \frac{1}{2(n+1)}\right)}$$

(b) On note $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Le résultat demandé découle directement du calcul des dérivées secondes. On remarque d'ailleurs que la hessienne ne dépend pas du point ce qui est normal car f est un polynôme de degré 2 en les x_k.

On a donc :

$$\boxed{\nabla f(a) = 2(I_n + J_n)}$$

4. La matrice J_n a toutes ses colonnes égales. Elle est donc au plus de rang 1. De plus, elle est non nulle. On a donc rg $J_n = 1$.

Par le théorème du rang, on en déduit que dim Ker $(J_n) = n - 1$. Ainsi 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.

On remarque par ailleurs que $J_n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

Ainsi, n est valeur propre de J_n. Comme le sous-espace propre associé à 0 est de dimension $n-1$, la dimension du sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n est nécessairement 1 et alors, par argument de dimension, $\boxed{\text{Sp } J_n = \{0, n\}}$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$J_n X = \lambda X \Leftrightarrow (I_n + J_n)X = (1 + \lambda)X \Leftrightarrow A_n X = 2(1 + \lambda)X$$

On en déduit donc que $\boxed{\text{Sp } A_n = \{2, 2(n+1)\}}$

5. La matrice hessienne de f en $a = (a_1, \dots, a_n)$ n'admet que des valeurs propres strictement positives donc f admet un minimum local en ce point. Ce mininum est alors :

$$f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4(n+1)^2} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(n+1)}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(n+1)} = -\frac{n}{4(n+1)}$$

6. (a) Chercher les extrema globaux de f sous la contrainte $\mathcal{C}_r$ revient à chercher les extrema de la restriction de f à S_r. Or S_r est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ et f est continue sur $\mathbb{R}^n$.
$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet donc un minimum global et un maximum global sur } S_r.}$

(b) On remarque que $\mathbb{R}^n \backslash \{(0, \dots, 0)\} = \bigcup_{r>0} S_r$ et que $S_r \cap S'_r = \varnothing$ pour $r \neq r'$ avec r et r' dans $\mathbb{R}_+^*$.
Comme, pour tout $x \in S_r$, $f(x) \geqslant m(r)$, il suffit de montrer qu'il existe $r_1 > 0$ tel que $m(r_1) \leqslant m(r)$ pour tout $r > 0$ pour montrer que la fonction f admet un minimum global.
Or, pour $r \geqslant r_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, $m(r) = r^2 - \dfrac{1}{4} \geqslant r_0^2 - \dfrac{1}{4}$.
On peut par ailleurs remarquer que :

$$r_0^2 - \frac{1}{4} = (n+1)r_0^2 - r_0\sqrt{n}$$

Maintenant la fonction $r \mapsto (n+1)r^2 - r\sqrt{n}$ est une fonction polynomiale de degré 2 qui admet un minimum en

$$r_1 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

On peut vérifier que l'on a bien $0 < r_1 < r_0$ car $n + 1 > n$.
Ainsi, pour tout $r \in]0, r_0]$: $m(r_1) \leqslant m(r)$. En particulier : $m(r_1) < m(r_0)$ et donc :

$$\forall r > 0 \quad m(r_1) \leqslant m(r) \text{ où } r_1 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

Or :

$$m(r_1) = (n+1)r_1^2 - r_1\sqrt{n} = \frac{1}{4}\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}\frac{n}{n+1} \boxed{= -\frac{1}{4}\frac{n}{n+1}}$$

En particulier $m(r_1) < 0 = f(0, \dots, 0)$.

Ainsi, la fonction f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ égal à $\boxed{-\dfrac{1}{4}\dfrac{n}{n+1}}$. On retrouve bien la valeur obtenue à la question 5.

(c) On note $g(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. La fonction g ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
Les points $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ où les extrema de f sous la contrainte $\mathcal{C}_r$ sont atteints sont nécessairement ceux pour lesquels $g(x) = r^2$ et pour lesquels il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \partial_i f(x) = \lambda \partial_i g(x)$$

soit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad 2(2-\lambda)x_i + 2\sum_{k \neq i} x_k = 1$$

La matrice augmentée de ce système est :

$$\tilde{B}_r = \begin{pmatrix} 2(2-\lambda) & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2(2-\lambda) & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2(2-\lambda) & & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2(2-\lambda) & 1 \end{pmatrix}$$

On suppose d'abord $\lambda \neq 1$. Sous cette hypothèse, on peut résoudre le système par les mêmes opérations élémentaires sur les lignes et colonnes que pour le système de la question 3.(a) et on obtient de même que $x_1 = \ldots = x_n$.
On a alors $2(n+1-\lambda)x_1 = 1$ et donc nécessairement, pour qu'il existe une solution, $\lambda \neq n+1$. Alors :

$$x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{2(n+1-\lambda)}$$

La contrainte $g(x) = r^2$ donne alors la condition :

$$\frac{n}{4(n+1-\lambda)^2} = r^2$$

soit :

$$\lambda = \lambda_1 = n+1+\frac{\sqrt{n}}{2r} \text{ ou } \lambda = \lambda_2 = n+1-\frac{\sqrt{n}}{2r}$$

On remarque que $\lambda_1 \neq n+1$ et $\lambda_2 \neq n+1$. De même $\lambda_1 \neq 1$. Par contre :

$$\lambda_2 = 1 \Longleftrightarrow r = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Pour la valeur $r = r_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, la valeur λ_2 est donc à éliminer.
De plus, pour $\lambda = \lambda_1$, alors :

$$x_1 = \ldots = x_n = -\frac{r}{\sqrt{n}} \text{ et } f(x_1, \ldots, x_n) = (n+1)r^2 + r\sqrt{n}$$

tandis que pour $\lambda = \lambda_2$, alors :

$$x_1 = \ldots = x_n = \frac{r}{\sqrt{n}} \text{ et } f(x_1, \ldots, x_n) = (n+1)r^2 - r\sqrt{n}$$

Regardons maintenant ce qui se passe dans le cas où $\lambda = 1$. Le système ne contient alors qu'une seule équation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2}$. A cela s'ajoute la contrainte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2$. S'il existe un $x = (x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifie ces deux équations, on a donc nécessairement :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = r^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = r^2 - \frac{1}{4}$$

A r fixé, on peut remarquer que :

$$r^2 - \frac{1}{4} \leqslant (n+1)r^2 - r\sqrt{n} \leqslant (n+1)r^2 + r\sqrt{n}$$

avec égalité dans la première inégalité si et seulement si $r = r_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Il est donc essentiel de savoir s'il existe un $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant les deux conditions :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2$$

Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1}$$

Ainsi, si un x vérifie les deux contraintes demandées, nécessairement :

$$\frac{1}{2} \leqslant r\sqrt{n} \quad \text{soit} \quad r \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Pour $r = r_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, on remarque que $x = \left(\dfrac{1}{2n}, \dots, \dfrac{1}{2n}\right)$ vérifie les deux conditions et par homothétie on pourra trouver un tel x pour $r > r_0$.
Comme déjà remarqué, à r fixé :

$$r^2 - \frac{1}{4} \leqslant (n+1)r^2 - r\sqrt{n} \leqslant (n+1)r^2 + r\sqrt{n}$$

Comme l'on sait déjà que $m(r)$ et $M(r)$ existent, on peut affirmer à partir des calculs précédents que :

$$\boxed{m(r) = \begin{cases} (n+1)r^2 - r\sqrt{n} & \text{si } 0 < r < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \\ r^2 - \dfrac{1}{4} & \text{si } r \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \end{cases} \quad \text{et} \quad M(r) = (n+1)r^2 + r\sqrt{n}}$$

Remarquons que les calculs précédents permettent également de retrouver que le minimum est atteint en $a = \left(\dfrac{1}{2(n+1)}, \dots, \dfrac{1}{2(n+1)}\right)$.

Kholle B :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\left((\ln x)^2 + 2y^2\right) .$$

1. La fonction f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathcal{O}$.
   Ses dérivées partielles d'ordre 1 sont données par

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = (\ln x)^2 + 2\ln x + 2y \\ \partial_2(f)(x,y) = 4xy \end{cases}$$

et sa matrice hessienne par

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} & 4y \\ 4y & 4x \end{pmatrix} .$$

Par annulation des deux dérivées partielles d'ordre 1, on trouve exactement deux points critiques dans l'ouvert $\mathcal{O}$:

$$\begin{cases} A = (1,0) \\ B = (\mathrm{e}^{-2},0) \end{cases} .$$

Au point A, les deux valeurs propres de la matrice hessienne sont strictement positives (2 et 4) et f admet donc un minimum local en A.
Au point B, les deux valeurs propres de la matrice hessienne sont de signes opposés ($-2\mathrm{e}^{-2}$ et $4\mathrm{e}^{-2}$) et B est un point col de f.
L'unique point col de f est donc B.

2. La fonction f n'admet aucun maximum global puisqu'elle n'admet aucun maximum locl.
   Le point A correspond à un minimum global de f puisque $f(0,1) = 0$ et que la fonction f ne prend que des valeurs positives ou nulles sur $\mathcal{O}$.

1. Question de cours

> Donner la définition des dérivées directionnelles, première et seconde, de f au point x dans la direction h pour une fonction f de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Préciser leur valeur en fonction du gradient $\nabla(f)(x)$ et de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x)$ de f au point x.

Soit f de classe C^2 sur Ω. Soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$ et $h = (h_1, \cdots, h_n)$.
On considère la fonction g définie pour tout t tel que $x+th$ appartienne à Ω par $g(t) = f(x+th)$.
Alors g est de classe C^2 au voisinage de 0.
Sa dérivée première en 0 est appelée dérivée directionnelle de f au point x dans la direction h :

$$g'(0) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(f)(x)h_i = < \nabla(f)(x), h >$$

Sa dérivée seconde en 0 est appelée dérivée seconde directionnelle de f au point x dans la direction h :

$$g''(0) = \sum_{i=1}^{n} h_i\Big(\sum_{j=1}^{n} \partial^2_{i,j}(f)(x)h_j\Big) = \ {}^tH\, \nabla^2(f)(x)\, H$$

2. Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note : $\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E\Big(\big(\mu - \sum_{i=1}^{n} x_iX_i\big)^2\Big)$.

> a) Justifier l'égalité : $\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \mu^2 \big(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\big)^2$.

Par la formule de Koenig-Huygens, $E((X-a)^2) = V(X) + (E(X) - a)^2$, on obtient :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E\Big(\big(\sum_{i=1}^{n} x_i(X_i - \mu) + \mu(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)\big)^2\Big) = V\big(\sum_{i=1}^{n} x_iX_i\big) + \big(\mu(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)\big)^2$$

puis l'égalité cherchée par indépendance des X_i.

> b) Justifier, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité : $\quad (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$.

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(1, \cdots, 1)$, fournit directement l'inégalité demandée.

> c) En déduire le minimum de f sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Le minimum de f sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ est $\dfrac{\sigma^2}{n}$, atteint exclusivement au point $\dfrac{1}{n}(1, 1, \ldots, 1)$.

On peut utiliser la condition du premier ordre pour un extremum local sous contrainte linéaire, qui impose l'égalité des x_i, mais cela n'a rien d'indispensable.

3.

> a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et trouver son unique point critique a.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \mu^2 \big(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\big)^2$$

La fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ parce qu'elle est polynomiale, et ses dérivées partielles sont données par :

$$\partial_i(f)(x) = 2\sigma^2 x_i + 2\mu^2\big(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\big)$$

On en déduit que le seul point critique de f est le point a dont toutes les coordonnées a_i sont égales à

$$\frac{\mu^2}{\sigma^2 + n\mu^2} .$$

b) Justifier l'égalité : $f(a+h) = f(a) + 2\int_0^1 (1-t)\Big(\mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i\, h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {h_i}^2\Big)\,\mathrm{d}t$.

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 à la fonction $g : t \longmapsto f(a+th)$ entre 0 et 1 :

$$f(a+h) = g(1) = g(0)+g'(0)+\int_0^1 (1-t)g''(t)dt = f(a)+ 2\int_0^1 (1-t)\Big(\mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i\, h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {h_i}^2\Big)\,\mathrm{d}t$$

parce que $g'(0) = 0$ et

$$g''(t) = {}^tH\, \nabla^2(f)(a+th)\, H = 2\mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j + 2\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} h_i^2$$

c) En déduire que f admet un minimum global en a.

Comme $\mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} h_i^2 = \mu^2\big(\sum_{i=1}^{n} h_i\big)^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \geq 0$, on déduit du résultat précédent que :

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n,\ f(a+h) \geq f(a)$$

ce qui prouve que f admet un minimum global en a.

Kholle C :

1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ comme quotient bien défini de fonctions polynomiales ($1+y^2$ est bien sûr différent de 0 pour tout réel y).

On a, pour tout triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{2x}{1+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{-2y(x^2+z^2)}{(1+y^2)^2}\ \text{ et }\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{2z}{1+y^2}.$$

2. La fonction $(x,y,z)\mapsto x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car polynomiale, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et la fonction *exponentielle* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction $(x,y,z)\mapsto e^x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. De même, la fonction $(x,y,z)\mapsto e^y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. On en déduit que la fonction $(x,y,z)\mapsto e^x+e^y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, et elle ne s'annule pas. Comme en outre la fonction $(x,y,z)\mapsto xz^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car polynomiale, alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ en tant que quotient bien défini de telles fonctions et, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{z^2(e^y+e^x-xe^x)}{(e^x+e^y)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{-xz^2e^y}{(e^x+e^y)^2}\ \text{ et }\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{2xz}{e^x+e^y}.$$

3. La fonction $(x,y,z)\mapsto z^2$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}^*)^2\times\mathbb{R}$ car polynomiale, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et la fonction *exponentielle* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc par composition la fonction $(x,y,z)\mapsto \exp(z^2)$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}^*)^2\times\mathbb{R}$. Comme en outre la fonction $(x,y,z)\mapsto xy$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}^*)^2\times\mathbb{R}$ car polynomiale, et qu'elle ne s'y annule pas, alors f est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}^*)^2\times\mathbb{R}$ en tant que quotient bien défini de telles fonctions et, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{-\exp(z^2)}{x^2y},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{-\exp(z^2)}{xy^2}\ \text{ et }\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{2z\exp(z^2)}{xy}.$$

1. La fonction f est polynomiale donc elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2. Les points critiques de f sont les solutions (x,y,z) du système $\nabla f(x,y,z)=(0,0,0)$.

Or, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, on a :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x^2-z+2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z-y$. On a alors :

$$\nabla f(x,y,z)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy=0 & (L_1) \\ x^2-z+2=0 & (L_2) \\ 2z-y=0 & (L_3) \end{cases}.$$

De (L_1) déduit : $x=0$ ou $y=0$.

Cas $x=0$. Dans ce cas, (L_2) donne $z=2$ et par suite, (L_3) donne $y=4$.

Cas $y=0$. Dans ce cas, (L_3) donne $z=0$ et (L_2) est impossible car elle s'écrit $x^2+2=0$.

Finalement, le système n'a qu'une solution, le triplet $(0,4,2)$, et f a un unique point critique, le point $A=(0,4,2)$.

2. a) Déterminons les dérivées partielles secondes de f en A.

Pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, on a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)=2x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z)=-1$, et enfin $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=2$, d'où, évaluées en $A=(0,4,2)$ et placée là où il faut : $\nabla^2 f(A)=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Deux possibilités s'offrent à nous : l'étude des valeurs propres de $\nabla^2 f(A)$ ou l'étude de la forme quadratique associée à $\nabla^2 f(A)$. La forme de $\nabla^2 f(A)$ fait préférer la première méthode.

$$\nabla^2 f(A)-\lambda I_3=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 8-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 8-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 8-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & -1-2\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3-\lambda L_2$$

Le trinôme $\lambda^2-2\lambda-1$ possède deux racines : $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. Les valeurs propres de $\nabla^2 f(A)$ sont donc 8, $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. $\nabla^2 f(A)$ possède une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative ($1-\sqrt{2}<0$), donc f ne présente pas d'extremum en A (A est un point selle).

1. On a sans peine : $\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial A}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2y+12xy^2+4y^3=0 \\ 4x^3+12x^2y+12xy^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y+3xy^2+y^3=0 & (L_1) \\ x^3+3x^2y+3xy^2=0 & (L_2) \end{cases}$.

De $(L_1)-(L_2)$, on tire : $x^3-y^3=0$, soit $x^3=y^3$, d'où $x=y$ car la fonction *cube* est bijective.
En reportant par exemple dans (L_1), il vient : $7x^3=0$, d'où $x=0$, et par suite $y=0$.
Bilan : le système proposé admet une solution et une seule : $(0,0)$.

2. a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $A(x,x)=14x^4$ et $A(x,-x)=-2x^4$. Ainsi : $A(x,x)>0$ et $A(x,-x)<0$.

b) Commençons par remarquer que, A étant de classe C^1 (car polynomiale) sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, si elle présente un extremum, c'est nécessairement en un point critique, c'est-à-dire en (0,0).
Or $A(0,0)=0$ et nous avons vu que, pour tout réel x non nul, $A(x,x)>0$ et $A(x,-x)<0$, c'est-à-dire que pour tout réel x non nul, $A(x,x)>A(0,0)$ et $A(x,-x)<A(0,0)$.
La fonction A ne peut pas admettre de maximum en (0,0), sinon il existerait une boule ouverte B de centre (0,0) telle que, pour tout point (x,y) de B, on ait $A(x,y)\le A(0,0)$, c'est-à-dire $A(x,y)\le 0$. Or, la boule ouverte B de centre (0,0) contient des points de la forme (x,x) en lesquels $A(x,x)>0$, d'où la contradiction cherchée.

On contredit de même l'existence d'un minimum pour A grâce à la présence de points de la forme $(x,-x)$ dans toute boule ouverte de centre (0,0).

Remarque. Pour montrer l'existence de points de la forme (x,x) et $(x,-x)$ dans toute boule ouverte B de centre (0,0). de rayon $r>0$, on écrit que $\left\|\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)\right\|=\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\frac{r}{\sqrt{2}}<r$, donc $\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)\in B$. On montre de même que $\left(\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)\in B$.

La fonction F possède une dérivée partielle par rapport à x sur $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, pour tout couple de réels (y,z), la fonction que nous noterons $\varphi : x \mapsto f(x-y, y-z, z-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si c'est le cas, alors l'expression de $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)$ est celle de $\varphi'(x)$. Or, la fonction φ est de la forme $x \mapsto f(u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, où $u_1 : x \mapsto x-y$, $u_2 : x \mapsto y-z$ et $u_3 : x \mapsto z-x$. Les fonctions u_1, u_2 et u_3 étant dérivables sur $\mathbb{R}$ et f étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ce qui montre que F admet une dérivée partielle par rapport à x, et de plus, pour tout réel x, on a successivement :

$$\varphi'(x) = u_1'(x)\frac{\partial f}{\partial x}(u_1(x),u_2(x),u_3(x)) + u_2'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(u_1(x),u_2(x),u_3(x)) + u_3'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(u_1(x),u_2(x),u_3(x))$$

$$\varphi'(x) = 1\times\frac{\partial f}{\partial x}(x-y,y-z,z-x) + 0\times\frac{\partial f}{\partial y}(x-y,y-z,z-x) + (-1)\times\frac{\partial f}{\partial z}(x-y,y-z,z-x).$$

Ainsi, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x-y,y-z,z-x) - \dfrac{\partial f}{\partial z}(x-y,y-z,z-x)$.

De même, pour tout couple (x,z) fixé de $\mathbb{R}^2$, la fonction $\psi : y \mapsto f(x-y, t-z, z-x)$ est de la forme $y \mapsto f(v_1(y), v_2(y), v_3(y))$, où $v_1 : y \mapsto x-y$, $v_2 : y \mapsto y-z$ et $v_3 : y \mapsto z-x$. Les hypothèses de dérivabilité pour les v_i et de classe C^1 pour f étant encore une fois vérifiées, le même théorème s'applique : ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc F admet une dérivée partielle par rapport à y, et on a :

$$\psi'(y) = v_1'(y)\frac{\partial f}{\partial x}(v_1(y),v_2(y),v_3(y)) + v_2'(y)\frac{\partial f}{\partial y}(v_1(y),v_2(y),v_3(y)) + v_3'(y)\frac{\partial f}{\partial z}(v_1(y),v_2(y),v_3(y))$$

Soit : $\psi'(y) = (-1)\times\dfrac{\partial f}{\partial x}(x-y,y-z,z-x) + 1\times\dfrac{\partial f}{\partial y}(x-y,y-z,z-x) + 0\times\dfrac{\partial f}{\partial z}(x-y,y-z,z-x)$.

Ainsi, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x-y,y-z,z-x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x-y,y-z,z-x)$.

On obtient exactement de la même manière, en prenant le point de vue de la variable réelle z, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x-y,y-z,z-x) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x-y,y-z,z-x)$.

On a donc bien, pour tout triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0$.