Correction probabilités générales et conditionnelles

Exercice 1 :

1. Faux! Il suffit de prendre A avec $0 < P(A) < 1$ et $B = \bar{A}$. Alors A et B sont incompatibles, mais ne sont pas indépendants!
2. Pas nécessairement! Si on lance un dé parfaitement équilibré, et qu'on considère les deux événements A="Obtenir un nombre pair" et B="Obtenir 5,6". Alors A et B sont indépendants. En effet, $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, et on a bien $P(A \cap B) = 1/6$ mais ils ne sont pas incompatibles. D'ailleurs, des événements indépendants ne sont presque jamais incompatibles. Il faudrait au moins que la probabilité d'un des deux soit nulle!
3. Faux! Il suffit que $P(A \cap B) = 0$ avec $A \cap B \neq \varnothing$ pour que ce ne soit pas vrai.
4. Faux (prendre l'exemple ci-dessus avec le dé...).
5. C'est vrai!

Exercice 2 :

Remarquons d'abord que $A \cap B \subset A$ et donc $P(A \cap B) \leq P(A)$. De même, $P(A \cap B) \leq P(B)$, ce qui prouve l'inégalité de droite. De plus, $P(A \cap B) \geq 0$ et aussi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

Mais $P(A \cup B) \leq 1$ et donc

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

On a donc aussi obtenu l'inégalité de gauche.

Exercice 3 :

On va procéder par récurrence sur n, le point clé étant la formule

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

La propriété est vraie si $n = 1$. Supposons-la vraie jusqu'au rang $n - 1$, et prouvons-la au rang n. On pose $A = A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ et $B = A_n$. Alors, d'après la formule précédente

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

Maintenant, on utilise l'hypothèse de récurrence pour minorer $\mathbb{P}(A)$, et on utilise le fait que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$, et on obtient

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) - (n-2) + P(A_n) - 1$$

ce qui est exactement le résultat voulu.

Exercice 4 :

1. On a :

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12\}$$

$$A \cap B = \{6, 12\}.$$

On a donc $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ et $P(A \cap B) = 1/6 = P(A)P(B)$. Les événements A et B sont indépendants.
2. Les événements A, B et $A \cap B$ s'écrivent encore exactement de la même façon. Mais cette fois, on a : $P(A) = 6/13$, $P(B) = 4/13$ et $P(A \cap B) = 2/13 \neq 24/169$. Les événements A et B ne sont pas indépendants. C'est conforme à l'intuition. Il n'y a plus la même répartition de boules paires et de boules impaires, et dans les multiples de 3 compris entre 1 et 13, la répartition des nombres pairs et impairs est restée inchangée.

Exercice 5 :

Clairement, on a $P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$. Les quatre possibilités pour les deux enfants, supposées équiprobables, sont (F,G), (F,F), (G,G), (G,F). On en déduit que $P(A)=\frac{1}{2}$.
Ensuite $A\cap B$ correspond à (F,G) et donc $P(A\cap B)=\frac{1}{4}=P(A)P(B)$. On en déduit que A et B sont indépendants.
On prouve de la même façon que A et C sont indépendants, et que B et C sont indépendants.
Enfin, $A\cap B\cap C=B\cap C$ et donc $P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)$. Les trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 6 :

Si les événements $A_1,\dots,A_n$ sont mutuellement indépendants, les événements complémentaires $\overline{A_1},\dots,\overline{A_n}$ le sont aussi. On en déduit que

$$\begin{aligned}P(A_1\cup\dots\cup A_n)&=1-P(\overline{A_1}\cap\dots\cap\overline{A_n})\\&=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})\\&=1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i).\end{aligned}$$

Dans le cas particulier proposé, la probabilité d'avoir au moins un accident vaut donc $1-(1-p)^n$.

Exercice 7 :

Supposons qu'il existe A et B deux événements non triviaux indépendants. On note m le cardinal de A et n le cardinal de B. On a donc $P(A)=m/p$ et $P(B)=n/p$. Puisque A et B sont supposés indépendants, et toujours parce que le modèle adopté est celui de l'équiprobabilité, on a :

$$\mathrm{card}(A\cap B)=p\times P(A\cap B)=\frac{mn}{p}.$$

Puisque le cardinal est un entier, p divise le produit mn, et par le théorème de Gauss, il divise l'un des deux, disons n. D'autre part, puisque $n\leq p$, ceci n'est possible que si $n=0$ ou $n=p$. Autrement dit, seulement si B est ou l'événement certain, ou l'événement impossible, c'est-à-dire un événement trivial.

Exercice 8 :

1. On procède en deux temps. D'une part :

$$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C).$$

Mais,

$$P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C),$$

et

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

On appelle aussi ceci la formule du crible de Poincaré, elle se généralise avec plusieurs événements par récurrence.

2. On note F_i l'événement : ``le composant C_i fonctionne''. Par hypothèse, les événements F_i sont mutuellement indépendants. Il faut calculer pour le premier cas $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$ (le circuit formé par les trois composants disposés en série fonctionne si et seulement si les trois composants fonctionnent), pour le second $P(F_1 \cup F_2 \cup F_3)$ (le circuit formé par les trois composants disposés en parallèle fonctionne si et seulement si un des trois composants fonctionne), et pour le troisième $P(F_1 \cap (F_2 \cup F_3))$. On a :

2.1. Par indépendance des événements :

$$P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = p_1 p_2 p_3.$$

2.2. D'après la formule précédente, et par indépendance des événements :

$$P(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3.$$

2.3. L'événement $F_2 \cup F_3$ est indépendant de F_1. On a donc :

$$P(F_1 \cap (F_2 \cup F_3)) = P(F_1) P(F_2 \cup F_3) = P(F_1)\big(P(F_2) + P(F_3) - P(F_2 \cap F_3)\big)$$

soit

$$P(F_1 \cap (F_2 \cup F_3)) = p_1 \left(p_2 + p_3 - p_2 p_3\right).$$

Exercice 9 :

On note B_i (resp. N_i) l'événement : ``La i-ème boule tirée est blanche (resp. noire)''. On cherche à calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3)$, ce que l'on va faire en utilisant la formule des probabilités composées :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1) P(B_2 | B_1) P(N_3 | B_1 \cap B_2).$$

Chacune des probabilités qui apparaît est facile à calculer, car $P(B_1) = 4/7$, $P(B_2|B_1) = 3/6$ (il reste 6 boules dont 3 blanches) et $P(N_3 | B_1 \cap B_2) = 3/5$. Finalement, on obtient $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \frac{6}{35}$.

Exercice 10 :

1. Distinguons les boules et ordonnons les tirages. Il y a $10 \times 9 \times 8$ tirages possibles. Calculons maintenant le nombre de tirages comprenant au moins une boule noire. Il y a deux possibilités :

- Le tirage ne comporte qu'une seule boule noire. Il y a 3 façons de choisir la position de la boule noire (lors du premier tirage, du deuxième, etc...), 2 choix pour cette boule, et ensuite 8×7 choix pour les deux boules blanches. En tout, il y a donc $3 \times 2 \times 8 \times 7$ tirages correspondants.
- Le tirage comporte les deux boules noires. On choisit d'abord les deux tirages où on a pris les boules noires : on choisit 2 places parmi 3, soit $\binom{3}{2} = 3$. Ce choix fait, il y a 2 choix pour les boules noires, et 8 choix pour les boules blanches. Il y a donc en tout $3 \times 2 \times 8$ tels tirages.

Le nombre total de tirages est donc $6 \times 8 \times 8$ et si on note B l'événement "Au moins une boule noire figure dans le tirage", alors la probabilité de B est égale à

$$P(B) = \frac{6 \times 8 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{8}{15}.$$

Remarquons que, comme souvent dans ce type d'exercice, il est plus facile de déterminer la probabilité du complémentaire : en effet, $\bar{B}$ est l'événement "on ne tire que des boules blanches". Le nombre de tirages correspondant est $8 \times 7 \times 6$ et donc

$$P(\bar{B}) = \frac{8 \times 7 \times 6}{10 \times 9 \times 8} = \frac{7 \times 6}{10 \times 9} = \frac{7}{15}$$

ce qui est bien la valeur attendue (ouf)!

2. Le dénombrement du nombre de tirages tels que la première boule soit noire est plus simple. Il y a exactement $2 \times 9 \times 8$ tirages. Si A est l'événement : "La première boule tirée est noire", alors

$$P(A) = \frac{2 \times 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{5}.$$

On cherche $P(A|B)$. Par définition,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{8}$$

puisque $A \subset B$.

Exercice 11 :

3. D'après la question précédente, la matrice

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

convient.

Comme à la question précédente, on a $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1/2$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = 1/4$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 1/4$. On en déduit que

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n.$$

En raisonnant de la même façon, ou par symétrie,

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n.$$

3. D'après la question précédente, la matrice

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

convient.

4. On a $V^n = M^n V_0$, ce qui donne

$$\begin{cases} a_n &= \frac{4^n+1}{3\cdot 4^n} \\ b_n &= \frac{4^n-2}{3\cdot 4^n} \\ c_n &= \frac{4^n-2}{3\cdot 4^n}. \end{cases}$$

On remarque qu'on a bien $a_n + b_n + c_n = 1$.
5. Les suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent toutes les trois vers 1/3. Au bout d'un très grand nombre de déplacements, les probabilités que le pion sur chacun des 3 points sont presque égales.

Exercice 12 :

1. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= P(X_1 = 1|X_0 = 1)P(X_0 = 1) + P(X_1 = 1|X_0 = 2)P(X_0 = 2) + P(X_1 = 1|X_0 = 3)P(X_0 = 3) \\ &= 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

De la même façon on trouve que $P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = \frac{1}{3}$. La variable aléatoire X_1 suit donc une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$. Par récurrence immédiate, la variable aléatoire X_n suivra aussi pour tout entier n la même loi.
2. On applique encore la formule des probabilités totales. On a

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P(X_{n+1} = 1|X_n = 1)P(X_n = 1) + P(X_{n+1} = 1|X_n = 2)P(X_n = 2) + P(X_{n+1} = 1|X_n = 3)P(X_n = \\ &= 0P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3). \end{aligned}$$

En effectuant le même calcul pour $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 3)$, on trouve que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

convient.
3. La matrice A est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable, et si on note D la matrice de ses valeurs propres, il existe une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^t$. Reste à démontrer que 1 est valeur propre de A, et que $-1/2$ est valeur propre double. On peut calculer le polynôme caractéristique de A, ou remarquer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre 1, et que $A + \frac{1}{2}I_3$ est de rang 1, ce qui assure que $-1/2$ est valeur propre d'ordre 2.

4. On a $U_n = A^n U_0 = PD^n P^t U_0$ où on a conservé les notations de la question précédente. Mais

$$D^n \to B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc (U_n) converge vers $PBP^t U_0 = U_\infty$. De la relation $U_{n+1} = AU_n$, on tire en passant à la limite que $U_\infty = AU_\infty$.
5. On sait que 1 est valeur propre de A d'ordre 1, et on a déjà trouvé un vecteur propre précédemment, à savoir $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. U_∞ est donc proportionnel à ce vecteur propre. Mais, puisque la somme des lignes de chaque vecteur U_n fait 1, il en est de même de la somme des lignes des vecteurs de U_∞. Ainsi, on a $U_\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 13 :

1. Le calcul du polynôme caractéristique de la matrice M est grandement facilité en développant par rapport à la deuxième colonne. On trouve que le polynôme caractéristique est

$$\chi_M(x) = \frac{1}{9}(1-x)\left(\frac{3}{4} - 6x + 9x^2\right).$$

Les valeurs propres sont $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$. Une matrice P possible est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

d'inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

2. Par hypothèse d'équiprobabilité, on a $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{3}$.

3. On va utiliser la formule des probabilités totales. L'énoncé nous donne

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}$$

$$P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{B_n}(C_{n+1}) = 0,\ P_{B_n}(B_{n+1}) = 1$$

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{7}P_{C_n}(B_{n+1}),\ P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}.$$

Utilisant que

$$P_{C_n}(A_{n+1}) + P_{C_n}(B_{n+1}) + P_{C_n}(C_{n+1}) = 1,$$

on trouve finalement que

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{12},\ P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{7}{12}.$$

Les trois événements A_n, B_n et C_n constituant un système complet d'événements, la formule des probabilités total donne maintenant

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n. \end{aligned}$$

De même, on trouve que

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + b_n + \frac{7}{12}c_n,\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n.$$

4. C'est évident!

5. On a $X_n = PD^nP^{-1}X_0$ et comme on sait calculer D^n, on trouve après calculs

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right),\ b_n = 1 - \frac{1}{2}\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$$

$$c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

6. Les suites (a_n) et (c_n) tendent vers 0, la suite (b_n) tend vers 1.

Exercice 14 :

1. L'énoncé donne directement $P(A)=0,05$, d'où $P(\bar{A})=0,95$, $P(D|A)=0,6$ et $P(\bar{D}|\bar{A})=0,98$. On en déduit :

$$P(\bar{D}|A)=1-P(D|A)=0,4$$
$$P(D|\bar{A})=1-P(\bar{D}|\bar{A})=0,02.$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D)=P(A)P(D|A)+P(\bar{A})P(D|\bar{A})=\frac{49}{1000}.$$

2. On obtient $P(A|D)$ grâce à la formule de Bayes :

$$P(A|D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(D|A)P(A)}{P(D)}=\frac{30}{49}.$$

Exercice 15 :

Les chiffres donnés ont l'air excellent, mais ils donnent l'inverse de ce que l'on souhaite. Le problème est plutôt le suivant : si une personne a une réponse positive au test, est-elle malade? C'est la formule de Bayes qui permet de remonter le chemin. Précisément, on note M l'événement "La personne est malade", et T l'événement "le test est positif". Les données dont on dispose sont $P(M)=10^{-4}$, $P(T|M)=0,99$ et $P(T|\bar{M})=0,001$. On cherche $P(M|T)$. La formule de Bayes donne :

$$\begin{aligned}P(M|T)&=\frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M)+P(T|\bar{M})P(\bar{M})}\\&=\frac{10^{-4}\times 0,99}{10^{-4}\times 0,99+10^{-3}\times 0,9999}\\&\simeq 0,09.\end{aligned}$$

C'est catastrophique! La probabilité pour qu'une personne positive au test soit effectivement malade est inférieure à 10%. Le test engendre donc beaucoup de faux-positifs (personnes positives au test, mais non malades). C'est tout le problème des maladies assez rares : les test de dépistage doivent être extrêmement fiables. Remarquons par ailleurs ici une bonne illustration du vieil adage des statisticiens : on peut faire dire n'importe quoi aux chiffres, cf le laboratoire pharmaceutique!

Exercice 16 :

Soit x la proportion de tricheurs dans la population. On note respectivement P,F,H,T les événements "le joueur obtient pile", "le joueur obtient face", "Le joueur est honnête", "le joueur est un tricheur". Il semble raisonnable de convenir que $P(P|H)=1/2$ et $P(F|H)=1/2$ et $P(P|T)=1$ (un tricheur fait vraiment ce qu'il veut!). On cherche donc $P(T|P)$. De la formule de Bayes, on déduit :

$$P(T|P)=\frac{P(P|T)P(T)}{P(P|T)P(T)+P(P|H)P(H)}=\frac{x}{x+1/2(1-x)}=\frac{2x}{x+1}.$$

Le résultat est plus ou moins réconfortant suivant la proportion de tricheurs x dans la population!