Correction Kholles MP : 18/10/2021

Kholle A :

1)

(a) L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(t+2\pi) = f(t)$ sont confondus.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe (Ox)
$f(\pi - t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe (Oy)
$f(\pi/2 - t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à la droit Δ: $y = x$.

On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0\,;\pi/4]$. La courbe obtenue sera complétée par les symétries d'axe Δ, (Oy) puis (Ox).
Tableau des variations simultanées

$$\begin{cases} x'(t) = -3\sin t\cos^2 t \\ y'(t) = 3\cos t \sin^2 t. \end{cases}$$

t	0		$\pi/4$
$x'(t)$	0	$-$	$-3/\sqrt{8}$
$x(t)$	1	$\searrow$	$2^{-3/2}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$2^{-3/2}$
$y'(t)$	0	$+$	$3/\sqrt{8}$
$m(t)$	?	$-$	-1

Étude en $t = 0$, le paramètre n'est pas régulier. Cependant

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^3}{-3/2t^2} \to 0.$$

La tangente est donc dirigée par l'axe des abscisses.

(b) L'équation de la tangente au point de paramètre t est

$$y = -\tan t(x - \cos^3 t) + \sin^3 t.$$

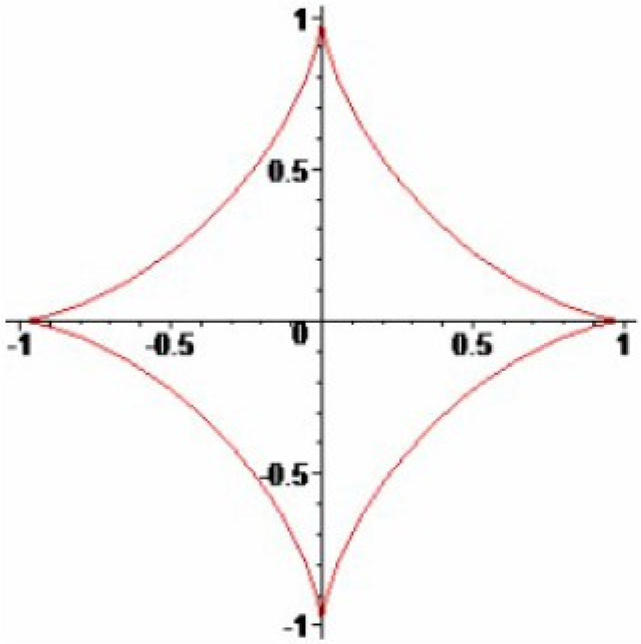


FIGURE 2 – L'astroïde

On a $A(t)\left|\begin{matrix}0\\ \sin t\end{matrix}\right.$ et $B(t)\left|\begin{matrix}\cos(t)\\ 0\end{matrix}\right.$ et donc

$$A(t)B(t) = 1.$$

2)

(a) En linéarisant

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

(b) On connait une primitive du logarithme ou l'on intègre par parties

$$\int_1^2 \ln t \,\mathrm{d}t = [t\ln t - t]_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

(c) On reconnait une forme $u'/\sqrt{u}$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

3)

(a)

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$$

(b)

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u+1}} = \left[2\sqrt{u+1}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$$

(c)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} \underset{u=\mathrm{e}^t}{=} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u = [\ln u - \ln(u+1)]_1^{\mathrm{e}} = \ln 2 - \ln(\mathrm{e}+$$

4)

Les primitives sont calculées dans $\mathbb{R}$. On écrit,

$$\frac{bx+c}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p} = b\frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p} + \frac{\alpha b+c}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p},$$

donc

$$\int \frac{bx+c}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p}dx = b\int \frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p}dx + (\alpha b+c)\int \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p}dx.$$

• Pour calculer la première intégrale, on fait le changement de variable

$$x \to y := (x-\alpha)^2+\beta^2.$$

Alors

$$b\int \frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p}dx = \frac{b}{2}\int \frac{1}{y^p}dy = -\frac{b}{2(p-1)}\frac{1}{y^{p-1}} + C$$
$$= -\frac{b}{2(p-1)}\frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{p-1}} + C,$$

où C est une constante quelconque.
• Pour calculer la seconde intégrale, on fait le changement de variable

$$x \to y := \frac{1}{\beta}(x-\alpha).$$

Alors

$$(\alpha b+c)\int \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p}dx = \frac{\alpha b+c}{\beta^{2p-1}}\int \frac{1}{(y^2+1)^p}dy.$$

On note, pour $p \geq 1$:

$$J_p := \int \frac{1}{(y^2+1)^p}dy.$$

On a

$$J_1 = \mathrm{Arc\,tg}\, y + C,$$

où C est une constante quelconque. En général

$$\begin{aligned}
J_p &= \frac{y}{(y^2+1)^p} + 2p\int \frac{y^2}{(y^2+1)^{p+1}}dy = \frac{y}{(y^2+1)^p} + 2p\int \frac{y^2+1-1}{(y^2+1)^{p+1}}dy \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^p} + 2p\int \frac{1}{(y^2+1)^p}dy - 2p\int \frac{1}{(y^2+1)^{p+1}}dy \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^p} + 2p(J_p - J_{p+1}).
\end{aligned}$$

Donc

$$J_{p+1} = \frac{2p-1}{2p}J_p + \frac{1}{2p}\frac{y}{(y^2+1)^p},$$

ce qui permet de calculer J_p de proche en proche.

Kholle B :

1)

L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(t+2\pi)$ est l'image de $f(t)$ par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe (Oy).
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0\,;\pi]$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe (Oy) et par les translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Tableau des variations simultanées

$$\begin{cases} x'(t) = 1-\cos(t) \\ y'(t) = \sin(t). \end{cases}$$

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	2
$x(t)$	0	$\nearrow$	π
$y(t)$	0	$\nearrow$	2
$y'(t)$	0	$+$	0

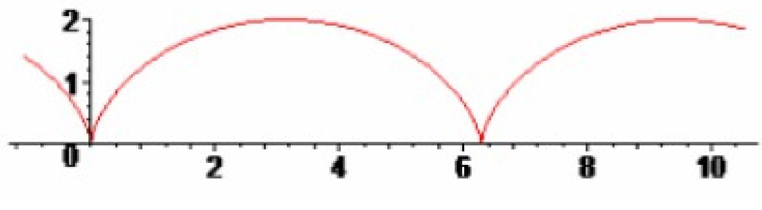


FIGURE 3 – La cycloïde

Le paramètre $t=0$ n'est pas régulier. Cependant

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^3/6} \to +\infty.$$

La courbe présente donc une tangente verticale en l'origine.

2)

(a) Par le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

(b) Via le changement de variable $t = \sin x$ (avec $x \in [0\,;\pi/2]$)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

3)

On a

$$I_n = \frac{1}{n}[x \sin nx]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{n^2}[\cos nx]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2}((-1)^n - 1)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

4)

Exemple 2.7. Calcul de

$$\int \frac{1}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}d\theta,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Dans tout intervalle où

$$a\cos^2\theta + b\sin^2\theta \neq 0 \quad \text{et} \quad \cos\theta \neq 0,$$

on a

$$\frac{1}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta} = \frac{1+\mathrm{tg}^2\theta}{a + b\mathrm{tg}^2\theta}.$$

Donc

$$\int \frac{1}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}d\theta = \int \frac{1+\mathrm{tg}^2\theta}{a+b\mathrm{tg}^2\theta}d\theta = \int \frac{1+t^2}{a+bt^2}\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{a+bt^2}dt.$$

5)

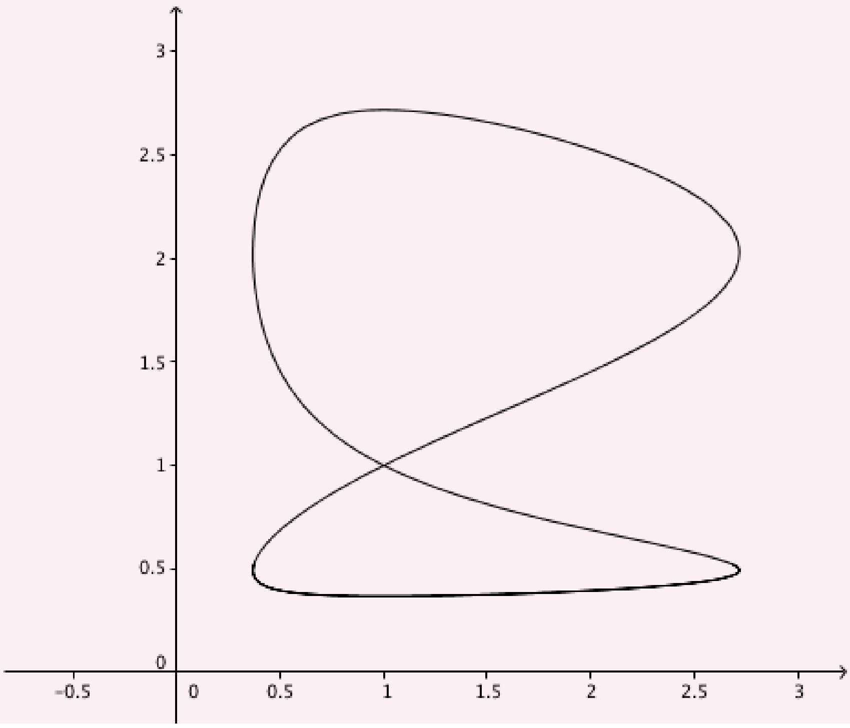
La fonction $x \mapsto \ln(1+\tan x)$ est définie et continue sur $[0\,;\pi/4]$ donc I existe.
$\ln(1+\tan x) = \ln(\cos x + \sin x) - \ln(\cos x)$ et $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.
Ainsi
$$I = \frac{\pi \ln 2}{8} + \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

or
$$\int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x \underset{t=\frac{\pi}{4}-x}{=} \int_0^{\pi/4} \ln\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

donc
$$I = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

6)

On obtient donc la courbe suivante :



Sur la courbe, il semble bien que le point $(1,1)$ soit un point double. Vérifions par le calcul. On cherche $t_1, t_2 \in [0, 2\pi[$ tels que

$$\begin{cases} \exp(\sin(2t_1)) & = & \exp(\sin(2t_2)) \\ \exp(\cos(t_1)) & = & \exp(\cos(t_2)) \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(2t_1) & = & \sin(2t_2) \\ \cos(t_1) & = & \cos(t_2) \end{cases}$$

Intéressons-nous d'abord à la deuxième équation. Elle implique que $t_2 = t_1 + 2k\pi$ ou $t_2 = -t_1 + 2k\pi$, avec k un entier relatif. Mais puisque t_1 et t_2 sont deux réels distincts de $[0, 2\pi[$, la première égalité est impossible, et la deuxième ne peut être vrai que pour $k = 1$. On a donc $t_2 = -t_1 + 2\pi$, et t_1 doit vérifier l'équation

$$\sin(2t_1) = \sin(-2t_1 + 4\pi) = \sin(-2t_1).$$

Cette équation entraîne que $2t_1 = -2t_1 + 2l\pi$ ou $2t_1 = \pi + 2t_1 + 2l\pi$, avec l un entier relatif. Le deuxième cas est impossible. Il reste donc $4t_1 = 2l\pi$, dont les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont $t_1 = 0$, à exclure car alors $t_2 = 2\pi$, $t_1 = \pi/2$, $t_1 = \pi$, à exclure également car dans ce cas $t_2 = t_1 = \pi$, et $t_1 = 3\pi/2$. En $t = \pi/2$ et $t = 3\pi/2$, on trouve bien le point double $(1,1)$.

Kholle C :

1)

Notons $f(t)$ la fonction définissant ce paramétrage.

(a) L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Les points désignés par $f(-t)$ et $f(t)$ sont symétriques par rapport à (Ox).
Étude limitée à $[0\,;+\infty[$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe (Ox)

$$\begin{cases} x'(t) = 6t \\ y'(t) = 6t^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \iff t = 0 \\ y'(t) = 0 \iff t = 0. \end{cases}$$

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$+$	

Étude en $t = 0$. Le point n'est pas régulier, cependant

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} \xrightarrow[t \to 0]{} 0.$$

Il y a une tangente horizontale en $t = 0$

(b) Pour $t \neq 0$, la tangente $\mathcal{D}_t$ en M a pour équation

$$-t^2(x - 3t^2) + t(y - 2t^3) = 0$$

soit

$$tx - y = t^3.$$

Pour $t \neq 0$, la normale $\mathcal{N}_t$ en M a pour équation

$$t(x - 3t^2) - t^2(y - 2t^3) = 0$$

soit

$$tx - t^2 y = 3t^3 - 2t^5.$$

Ces équations sont encore valables pour $t = 0$.

(c) La tangente $\mathcal{D}_t$ est normale à la courbe au point N de paramètre τ si, et seulement si,

$$\begin{cases} 3t\tau^2 - 2\tau^3 = t^3 \\ t\tau + t^2\tau^2 = 0 \end{cases}$$

ce qui traduit $N \in \mathcal{D}_t$ et l'orthogonalité des tangentes en M et N.
Si $t = 0$ alors $\tau = 0$ mais le couple $(0,0)$ n'est pas solution.
Si $t \neq 0$ alors $\tau \neq 0$ et $\tau = -1/t$ puis $\frac{3}{t} + \frac{2}{t^3} = t^3$ d'où $(t^2+1)^2(t^2-2) = 0$ ce qui donne $t = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

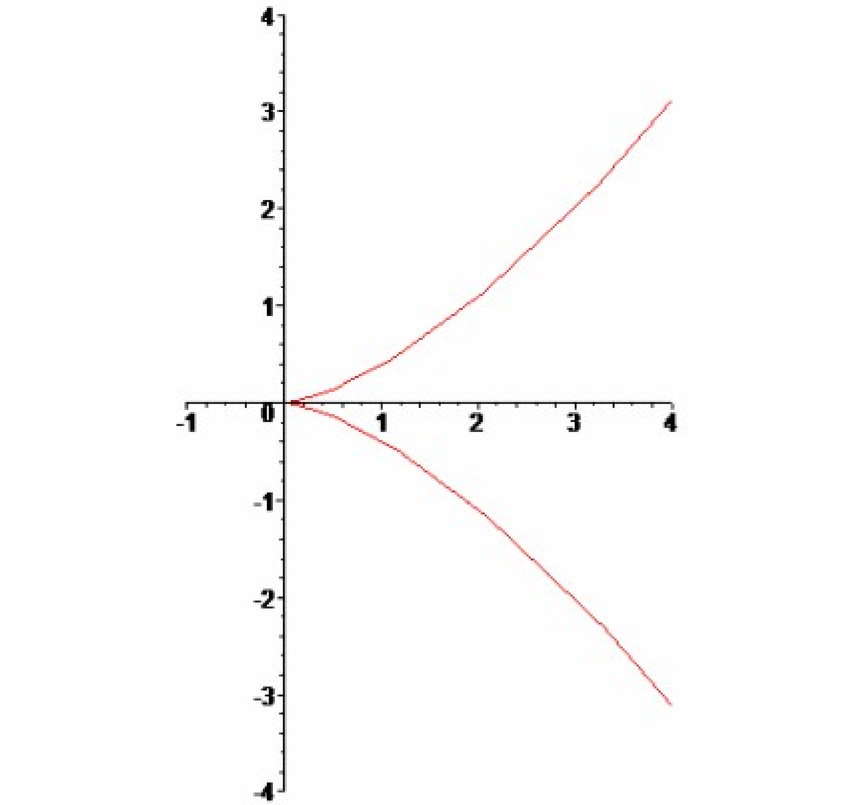


FIGURE 6 – La courbe $x = 3t^2, y = 2t^3$

2)

Sur $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} \underset{u=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+1} + C^{te} = \ln(\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1) - x + C^{te}.$$

Sur $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \underset{u=\cos x}{=} \int -\frac{\mathrm{d}u}{2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\cos x - \sqrt{2}}{\cos x + \sqrt{2}}\right| + C^{te}$$

Sur $]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$, $\int \frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x \underset{x=\sqrt{2}\sin t}{=} \int \sqrt{2}\sin t + 1\,\mathrm{d}t = -\sqrt{2}\cos t + t + C^{te} = -\sqrt{2-x^2} + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C^{te}$.

$$\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

3) On constate que :

$$I_n = \int_0^1 x\frac{x^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

et que :

$$0 \le \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$

car il est connu que $\ln(1+t) \le t$ pour $t > -1$.
On a alors

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \to 0$$

donc

$$u_n = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

4)

- Calcul de

$$\int \cos^{2\ell}\theta \sin^{2m}\theta d\theta,$$

dans le cas général : on utilise les *formules d'Euler*. On a

$$\cos^{2\ell}\theta\sin^{2m}\theta = \cos^{2\ell}\theta(1-\cos^2\theta)^m.$$

Il suffit donc de connaître les primitives des puissances (paires) de $\cos\theta$. On a

$$\cos^m\theta = \frac{1}{2^m}(\mathrm{e}^{\imath\theta}+\mathrm{e}^{-\imath\theta})^m = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\mathrm{e}^{\imath(m-2k)\theta}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\cos^{2\ell}\theta &= \frac{1}{2^{2\ell}}\sum_{k=0}^{2\ell}\binom{2\ell}{k}e^{2i(\ell-k)\theta}\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\left(\sum_{k=0}^{\ell-1}\binom{2\ell}{k}\left(e^{2i(\ell-k)\theta}+e^{-2i(\ell-k)\theta}\right)+\binom{2\ell}{\ell}\right)\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\left(2\sum_{k=0}^{\ell-1}\binom{2\ell}{k}\cos 2(\ell-k)\theta+\binom{2\ell}{\ell}\right)\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\left(\binom{2\ell}{\ell}+2\sum_{j=1}^{\ell}\binom{2\ell}{\ell-j}\cos 2j\theta\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos^{2\ell+1}\theta &= \frac{1}{2^{2\ell+1}}\sum_{k=0}^{2\ell+1}\binom{2\ell+1}{k}e^{i(2(\ell-k)+1)\theta}\\
&= \frac{1}{2^{2\ell+1}}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{2\ell+1}{k}\left(e^{i(2(\ell-k)+1)\theta}+e^{-i(2(\ell-k)+1)\theta}\right)\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{2\ell+1}{k}\cos(2(\ell-k)+1)\theta\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\sum_{j=0}^{\ell}\binom{2\ell+1}{\ell-j}\cos(2j+1)\theta.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int\cos^{2\ell}\theta d\theta &= \frac{1}{2^{2\ell}}\left(\binom{2\ell}{\ell}\theta+2\sum_{j=1}^{\ell}\binom{2\ell}{\ell-j}\int\cos 2j\theta d\theta\right)\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\left(\binom{2\ell}{\ell}\theta+\sum_{j=1}^{\ell}\binom{2\ell}{\ell-j}\frac{1}{j}\sin 2j\theta\right)+C
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int\cos^{2\ell+1}\theta d\theta &= \frac{1}{2^{2\ell}}\sum_{j=0}^{\ell}\binom{2\ell+1}{\ell-j}\int\cos(2j+1)\theta d\theta\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\sum_{j=0}^{\ell}\binom{2\ell+1}{\ell-j}\frac{1}{2j+1}\sin(2j+1)\theta+C,
\end{aligned}$$

où C est une constante quelconque.

5)

(a) Par le changement de variable $u = \pi - t$, on obtient

+1)+1

$$I = \int_0^{\pi} t f(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (\pi - u) f(\sin u)\,\mathrm{d}u$$

et donc

$$2I = \int_0^{\pi} t f(\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} (\pi - u) f(\sin u)\,\mathrm{d}u = \pi \int_0^{\pi} f(\sin u)\,\mathrm{d}u$$

puis l'identité proposée.

(b) En observant $\cos^{2n} x = (1 - \sin^2 x)^n$, on peut appliquer la relation précédente

$$I_n = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$$

En coupant l'intégrale en $\pi/2$

$$I_n = \frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x\right]$$

En procédant au changement de variable $y = \pi - x$ dans la seconde intégrale

$$I_n = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$$

Enfin, en procédant au changement de variable $y = \pi/2 - x$, on observe

$$I_n = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$$

et on en déduit

$$2I_n = \pi\left[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\pi^2}{2}$$

Finalement

$$I_n = \frac{\pi^2}{4}$$