(a) $\chi_A(X) = (X - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha$ de racines $\mathrm{e}^{i\alpha}$ et $\mathrm{e}^{-i\alpha}$.
Si $\alpha \neq 0 \quad [\pi]$ alors A possède deux valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.
Si $\alpha = 0 \quad [\pi]$ alors A est diagonale.

(b) Si $\alpha \neq 0 \quad [\pi]$ alors A ne possède pas de valeurs propres (réelles) donc n'est pas diagonalisable.
Si $\alpha = 0 \quad [\pi]$ alors A est diagonale.

(c) $\chi_B(X) = (X - \cos\alpha)(X + \cos\alpha) - \sin^2\alpha$ de racines ± 1 donc B est diagonalisable.

En ajoutant la troisième colonne à la première puis en retranchant la première ligne à la troisième

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^3 \begin{vmatrix} -\lambda - 2 & 5 + x & x \\ 0 & -2 - x - \lambda & -x \\ 0 & -x & 3 - x - \lambda \end{vmatrix}$$

ce qui donne

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + 2)\left(\lambda^2 + (2x - 1)\lambda - x - 6\right)$$

Le facteur a pour discriminant

$$\Delta = (2x - 1)^2 + 4x + 24 = 4x^2 + 25 > 0$$

et possède donc deux racines réelles distinctes. Si celles-ci diffèrent de -2, alors la matrice A possède trois valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.
Il est donc nécessaire que -2 soit racine de $\lambda^2 + (2x - 1)\lambda - x - 6$ pour que la matrice A ne soit pas diagonalisable. C'est le cas si, et seulement si, $x = 0$ et alors

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\mathrm{rg}(A + 2I_3) = 2$$

et donc $\dim E_{-2}(A) = 1 < m_{-2}(A)$ ce qui entraîne que la matrice A n'est pas diagonalisable.
Finalement A n'est pas diagonalisable si, et seulement si, $x = 0$.

La matrice A est la matrice dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de l'endomorphisme

$$u \colon P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto nXP + (1 - X^2)P'$$

Considérons alors la base de polynômes étagés $(1,(X+1),\ldots,(X+1)^n)$. On a

$$u\left((X+1)^k\right) = nX(X+1)^k + k(1-X)(X+1)^k$$

qui se réécrit

$$u\left((X+1)^k\right) = (n-k)(X+1)^{k+1} + (2k-n)(X+1)^k$$

La matrice de l'endomorphisme u dans la base $(1,(X+1),\ldots,(X+1)^n)$ est triangulaire inférieure de coefficients diagonaux distincts

$$2k-n \text{ avec } k \in \{0,\ldots,n\}$$

On en déduit χ_A et on observer que A possède $n+1$ valeurs propres distinctes. La matrice A est donc diagonalisable.

Le polynôme caractéristique de M est

$$P = X^3 - X - z$$

Celui-ci admet trois racines complexes comptées avec multiplicité. Recherchons pour quel z le polynôme P admet une racine multiple.

> Les racines multiples d'un polynôme sont les racines communes à celui-ci et à son polynôme dérivé.

On a $P' = 3X^2 - 1$ de racines $\pm 1/\sqrt{3}$. Celles-ci sont racines de P si, et seulement si, $z = \pm 2/3\sqrt{3}$.
Cas: $z \neq \pm 2/3\sqrt{3}$. Le polynôme P présente trois racines simples, la matrice M est diagonalisable.
Cas: $z = 2/3\sqrt{3}$. La matrice M présente une valeur propre double : $1/\sqrt{3}$. Or

$$\mathrm{rg}\left(M - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{I}_3\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 0 & z \\ 1 & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = 2$$

(il y a clairement une matrice inversible de taille 2 incluse dans la matrice dont on calcule le rang qui, par ailleurs, est assurément non inversible).
On en déduit que l'espace propre associé à la valeur propre double est de dimension 1 : la matrice M n'est pas diagonalisable.
Cas: $z = -2/3\sqrt{3}$. C'est identique.

Introduisons la colonne $X_n = {}^t\begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \end{pmatrix}$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de sorte qu'on ait $X_{n+1} = AX_n$ et donc $X_n = A^n X_0$.
Après réduction, on a $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a alors $A^n = PD^nP^{-1}$ puis

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0$$

La suite (X_n) converge si, et seulement si, la suite $(P^{-1}X_n)$ converge. Or

$$P^{-1}X_n = D^nP^{-1}X_0$$

converge si, et seulement si, les deux dernières coefficients de la colonne $P^{-1}X_0$ sont nuls ce qui donne X_0 de la forme

$$X_0 = P\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Finalement, les suites $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ convergent si, et seulement si, $u_0 = v_0 = w_0$ (et ces suites sont alors en fait constantes...)

La colonne ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 6.
Les deux matrices ont le même polynôme caractéristique et celui-ci a pour racines

$$6, \ \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$$

Ces deux matrices sont semblables à

$$\operatorname{diag}\left(6, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

et donc *a fortiori* semblables entre elles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais aussi, et c'est assez classique, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) $\chi_A(X) = (X+1)(X-1)^2$.

(b) $E_{-1} = \operatorname{Vect}{}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $E_1 = \operatorname{Vect}{}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La matrice A n'est pas diagonalisable mais on peut la rendre semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On prend $C_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C_2 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On détermine C_3 tel que $AC_3 = C_3 + C_2$. $C_3 = {}^t\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.
Pour

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $P^{-1}AP = T$.

(a) $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Puisque f est continue, f admet une primitive F et alors quand $x \to 0^+$

$$T(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \to F'(0) = f(0)$$

On en déduit que $T(f)$ se prolonge en une fonction continue en 0.
La linéarité de T est immédiate et donc T est un endomorphisme de E.

(b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et f une fonction de E non nulle vérifiant $T(f) = \lambda f$.
Pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda x f(x)$$

donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$(1-\lambda)f(x) = \lambda x f'(x)$$

Le cas $\lambda = 0$ implique $f = 0$ et est donc exclu.
Pour $\lambda \neq 0$ et $x > 0$ on a

$$x f'(x) = \alpha f(x)$$

avec $\alpha = (1-\lambda)/\lambda$ dont la résolution conduit à

$$f(x) = Cx^\alpha, x \in]0\,;+\infty[$$

(a) A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte T.

(b) On peut écrire $A = PTP^{-1}$ donc

$$\det(A + I_n) = \det(T + I_n) = 1$$

(c) $\det(A + M) = \det(M)\det(AM^{-1} + I_n)$.
Puisque $(AM^{-1})^n = A^n M^{-n} = O_n$, 0 est la seule valeur propre de AM^{-1} et par l'étude qui précède $\det(A + M) = \det M$.

(d) Si A est solution alors pour tout $\lambda \neq 0$, $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ donc 0 est seule valeur propre de A.

(a) Par le calcul

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & 0 \\ \vdots & & & 1 \\ 1 & & & \vdots \\ 0 & (0) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Puisque A et A^2 ne possèdent que deux colonnes non nulles et que celles-ci sont visiblement indépendantes, on a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2 = 2$.

(b) On a $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$ donc $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$. Or $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
Pour $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, on peut écrire $x = f(a)$ et on a $f(x) = 0$ donc $a \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ puis $x = 0$.
On en déduit $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$ et un argument de dimension permet d'affirmer $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$.

(c) Une base adaptée à la décomposition $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$ permet de justifier que la matrice A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ (0) & & & B \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Puisqu'on a alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$, on peut affirmer que la matrice B est inversible.

(d) $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A = 0$ et $\operatorname{tr} B^2 = \operatorname{tr} A^2 = 2$.
Soient λ et μ les deux valeurs propres complexes de la matrice B. On a

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 2 \end{cases}$$

On en déduit

$$\{\lambda, \mu\} = \{1, -1\}$$

Ainsi

$$\operatorname{Sp} B = \{1, -1\} \text{ et } \operatorname{Sp} A = \{1, 0, -1\}$$

(e) Par calcul de rang

$$\dim E_0(A) = \dim \operatorname{Ker} A = n - 2$$

On a aussi

$$\dim E_1(A) = \dim E_1(B) = 1 \text{ et } \dim E_{-1}(A) = 1$$

donc la matrice A est diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n.