# Kholles MPSI 19/09/2022, correction

## 1 Question de cours

Démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

## 2 Exercices

**Exercice 1.** Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{2n-1}{(n+1)!} + \dfrac{3}{(n+1)} \times v_n$

1. Calculer $v_2$.
2. Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = n!v_n + n$. Montrer que $(w_n)$ est géométrique. Calculer $w_n$ en fonction de $n$ puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{3^{n+1}-n}{n!}$.

**Exercice 2.** Calculer, pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n+4} |n-k-3| = \sum\limits_{k=0}^{n-3} |n-k-3| + \sum\limits_{k=n-2}^{n+4} |n-k-3| = \sum\limits_{k=0}^{n-3} n-k-3 + \sum\limits_{k=n-2}^{n+4} 3+k-n =$
   $= \sum\limits_{k=0}^{n-3} n-3 - \sum\limits_{k=0}^{n-3} k + \sum\limits_{k=n-2}^{n+4} 3-n + \sum\limits_{k=n-2}^{n+4} k = (n-3)(n-2) - \dfrac{(n-3)(n-2)}{2} + (3-n)7 + \dfrac{7(2n+2)}{2} =$
   $= (n-3)[(n-2) - 7 - \dfrac{n-2}{2}] + 7(n+1) = (n-3)\dfrac{n-16}{2} + 7n + 7 = \dfrac{n^2-12n+55}{2}$
2. $\prod\limits_{k=1}^{n} k^2 e^{-3k} = (\prod\limits_{k=1}^{n} k)^2 \prod\limits_{k=1}^{n} e^{-3k}$ On calcule $\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} e^{-3k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} -3k = -\dfrac{3}{2}n(n+1)$ et donc $\prod\limits_{k=1}^{n} ke^{-2k} = n!^2 e^{-\frac{3}{2}n(n+1)}$

**Exercice 3.** Soit $k \leqslant n$.

1. $\sum\limits_{0\leqslant i,j\leqslant n} \binom{n}{i} j = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{i} j = \dfrac{n(n+1)}{2} 2^n = n(n+1)2^{n+1}$
2. Par la formule de Pascal, pour tout $k,n \in \mathbb{N}$, $\binom{n+j}{k} = \binom{n+j+1}{k+1} - \binom{n+j}{k+1}$ donc :

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{n+j}{k} = \sum_{j=0}^{m} \binom{n+j+1}{k+1} - \binom{n+j}{k+1} = \binom{n+m+1}{k+1} - \binom{n+1}{k+1}$$

**Exercice 4.** *On rappelle ici que* $(\sum\limits_{k=1}^{n} k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit pour tout $i \in \mathbb{N}$, $S_i = \sum\limits_{k=1}^{n} k^i$.

1. $S_0 = n$, $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $S_3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
2. $(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$.
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)^5 - k^5 = \sum\limits_{k=1}^{n} 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 = 5\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum\limits_{k=1}^{n} k + \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = 5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + S_0$
4. Mais $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)^5 - k^5 = (n+1)^5 - 1$ et donc :
   $S_4 = \dfrac{(n+1)^5 - 1 - 10S_3 - 10S_2 - 5S_1 - S_0}{5} = \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n}{5} - 2S_3 - 2S_2 - S_1 - \dfrac{S_0}{5} =$
   $= \dfrac{n^5}{5} + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n - \dfrac{6n^2(n+1)^2 + 4n(n+1)(2n+1) + 6n(n+1)}{12} - \dfrac{n}{5}$

**Exercice 5.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculons les 3 sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}n = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-1)^{j+1} = -n(1-1)^{n-1} = 0$.
2. $\sum_{k=1}^{n} ln(1+\frac{2}{k(k+3)} = \sum_{k=1}^{n} ln(\frac{k^2+3k+2}{k(k+3)} = \sum_{k=1}^{n} ln(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)} = \sum_{k=1}^{n} ln(\frac{k+1}{k+3}) - ln(\frac{k}{k+2}) = ln(\frac{n+1}{n+3}) - ln(1/3) = ln(\frac{3n+3}{n+3}$
3. $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij = \sum_{j=1}^{n} j\sum_{i=1}^{j-1} i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3 - j^2 = \frac{1}{2}\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3}\right) = \frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{3n^2 -\right.$
   $\frac{n(n+1)3(n+1)(n-2/3)}{4\times 6} = \frac{n(n+1)^2(n-2/3)}{8}$.

**Exercice 6.** $\sum_{k=2}^{n} n(4-k) = \sum_{k=2}^{n} 4n - n\sum_{k=2}^{n} k = 4n(n-1) - n(\frac{n(n+1)}{2} - 1) = 4n(n-1) - n - \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{n(8(n-1)-2-n(n+1))}{2} = \frac{n(-n^2+7n+6)}{2}$

$\sum_{k=2}^{n+2}(k-2)^2 = \sum_{k=0}^{n} K^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{n}2^k = (1+2)^n - 1 = 3^n - 1$ par le binôme de Newton.

**Exercice 7.** Soit $n,k \in \mathbb{N}^*$. Considérons que $k \leqslant 2n-2$

$\frac{\binom{2n}{k+2}}{\binom{2n+1}{k+1}} = \frac{(2n)!}{(k+2)!(2n-k-2)!} \times \frac{(k+1)!(2n-k)!}{(2n+1)!} = \frac{(2n-k)(2n-k-1)}{(2n+1)(k+2)}$.

Ainsi, par positivité : $\binom{2n}{k+2} \geqslant \binom{2n+1}{k+1} \Leftrightarrow \frac{(2n-k)(2n-k-1)}{(2n+1)(k+2)} \geqslant 1 \Leftrightarrow (2n-k)(2n-k-1) \geqslant (2n+1)(k+2) \Leftrightarrow 4n^2 - 4nk + k^2 - 2n + k \geqslant 2nk + 4n + k + 2 \Leftrightarrow 4n^2 - 6n(k+1) + k^2 - 2 \geqslant 1$

et comparer les.

**Exercice 8.** Étudions la monotonie de la suite $(u_n)_n = \left(\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\right)_n$ et de la suite $(v_n)_n = \left(\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}\right)_n$ :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1+2n+2-2(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$ donc la suite $(u_n)_n$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2}\frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{(2n+1)n + (2n+2)n - (2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)n} = \frac{-7n-2}{(2n+2)(2n+1)n} < 0$ donc la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

**Exercice 9.** Analyse : Soit $x$ tel que $x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On a donc $x^{n+2} - x^{n+1} - x^n \leqslant 0$ et donc $x^n(x^2-x-1) \leqslant 0$.

Ainsi $x^n$ et $x^2-x-1$ sont de signes contraires ou nuls.

Or si $x$ est strictement négatif, $x^n$ change de signes (en fonction de $n$ : par exemple, si $n=2$ alors $x^n \geqslant 0$ et si $n=1$ alors $x^n \leqslant 0$) alors que à $x$ fixé : $x^2-x-1$ est de signe constant. Ainsi si $x^2-x-1 \neq 0$ et $x<0$ alors c'est impossible.

De plus, $x^2-x-1$ a pour discriminant 5 et pour racine $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi si $x>0$ alors $x^n>0$ et il faut donc que $x^2-x-1$ soit négatif, donc $x \in ]0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.

Ainsi les valeurs de $x$ possibles sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , $0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ainsi que l'intervalle $]0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

Synthèse : Montrons que si $x \in [0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}] \cup \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$ alors $x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + x^n$.

En effet, $x^{n+2} - x^{n+1} - x^n \leqslant 0 \Leftrightarrow x^n(x^2-x-1) \leqslant 0$. Si $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ alors $x^n(x^2-x-1) = 0$ et si $x \in [0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ alors $x^n \geqslant 0$ et $x^2-x-1 \leqslant 0$ donc $x^n(x^2-x-1) \leqslant 0$.

Ainsi $S = [0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}] \cup \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$.

**Exercice 10.** Montrons par récurrence forte que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose comme un produit de facteurs premiers.

I : $2 = 2$ est le produit de facteur premier.

h : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que pour tout $k \in [[2,n]]$ $k$ est un entier décomposable en produit de nombre premier.

Ainsi soit $n+1$ est premier et dans ce cas, il n'y a rien à démontrer.
Sinon $n+1$ est composée et donc il existe deux entiers $2 \leqslant, q \leqslant n$ tels que $pq = n+1$.
Ainsi comme $p$ s'écrit comme un produit de nombres premiers et $q$ aussi alors $pq$ également d'où le résultat.
(on peut écrire cela ainsi : il existe $p_1, \dots, p_r \in \mathcal{P}$ tel que $p = p_1 \times \dots \times p_r$....).
Conclusion : ....

**Exercice 11.** Soit $A, B, C$ trois sous ensembles de $E$. Montrons $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$ :
Supposons $A \Delta B = A \Delta C$, soit $x \in B$, alors soit $x \in A$, alors $x \notin A \Delta B = A \Delta C$ et donc $x \in A$, $x \in C$.
Supposons soit $x \notin A$, alors $x \in A \Delta B = A \Delta C$ et donc $x \notin A$, $x \in C$.
L'autre inclusion se montre de la même manière.
La réciproque est immédiate.

# 3 Une question de recherche

**Exercice 12.** Soient $A, B$ deux parties de $E$.
$A \cap X = B$ admet des solutions ssi $B \subset A$ : trivial.

Cherchons les solutions : Montrons que $A \cap X = B \Leftrightarrow B \subset X \subset B \cup \bar{A}$.
Soit $X$ tel que $A \cap X = B$, alors $X \subset B$.
On a $X = (A \cap X) \cup (\bar{A} \cap X) \subset B \cup \bar{A}$.
Réciproquement $B \subset X \subset B \cup \bar{A}$ : alors $X = B \cup C$ avec $C \subset \bar{A}$, ainsi $A \cap X = (A \cap B) \cup (A \cap C) = B$.

**Exercice 13.** Soient $E$ un ensemble, $A_1, A_2, \dots, A_n$ et $B_1, B_2, \dots, B_n$ deux familles de parties de $E$ telles que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ on ait $E = A_i \cup B_i$.

Montrons $E = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)$ par double inclusion :
Le sens direct : soit $x \in E$ alors pour tout $i \in [[1,n]]$, $x \in A_i \cup B_i$. Ainsi si pour tout $i \in [[1,n]]$, $x \notin A_i$ alors $x \in B_i$ pour tout $i \in [[1,n]]$ et donc $x \in \bigcap_{i=1}^{n} B_i$. Si il existe $i \in [[1,n]]$ tel que $x \in A_i$ alors $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, d'où l'inclusion directe.
Le sens indirect : il est trivial, il s'agit de sous parties de $E$.

**Exercice 14.** Soient $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux familles de réels. On pose :

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \ , \ \beta = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \ et \ \gamma = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

On introduit aussi, $\forall x$, $P(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + x b_k)^2$.

1. On remarque que $P(x) = \alpha + 2\gamma x + \beta x^2$. Or ce trinôme est toujours positif ou nul donc son discriminant est négatif ou nul : $4\gamma^2 - 4\alpha\beta \leqslant 0 \Leftrightarrow \gamma^2 \leqslant \alpha\beta$
2. On en déduit que : $(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \times \sum_{k=1}^{n} b_k^2$ puis le résultat en prenant la racine carrée.

   Puis on trouve, en prenant $b_k = 1$ pour tout $k \in [[1;n]]$, $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leqslant \sqrt{n} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$