Correction 30/11/2021 :

Kholle A :

1. Cours.

2.a) On a : $Z_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$ ou encore $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0,1\rrbracket)$. D'autre part, $Z_2 = 2\,X_1 + X_2$ et $Z_2(\Omega) = \llbracket 0,3\rrbracket$.
On a par exemple, $[Z_2 = 3] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \Longrightarrow P(Z_2 = 3) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$. De même, on trouve sans difficulté, $P(Z_2 = 0) = P(Z_2 = 1) = P(Z_2 = 2) = 1/4$, d'où $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0,3\rrbracket)$.

b) $Z_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k}\,X_k = 2\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}\,X_k + X_{n+1} = 2\,Z_n + X_{n+1}$. On note que $2\,Z_n$ et X_{n+1} sont indépendantes.
Pour tout $n \geqslant 1$, soit $\mathcal{H}_n$: "Z_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, 2^n - 1\rrbracket$".
• $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont vraies.
• Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Alors, $2\,Z_n$ suit la loi uniforme sur $\{2k$ tels que $k \in \llbracket 0, 2^n-1\rrbracket\} = \{0, 2, 4, \ldots, 2^{n+1}-2\}$.
Comme X_{n+1} ne prend que les valeurs 0 et 1, Z_{n+1} prend les valeurs $\{2k$ tels que $k \in \llbracket 0, 2^n - 1\rrbracket\}$ quand $X_{n+1} = 0$ et $\{2k+1$ tels que $k \in \llbracket 0, 2^n - 1\rrbracket\}$ quand $X_{n+1} = 1$. Pour $k \in \llbracket 0, 2^n - 1\rrbracket$, on a :

$$\begin{cases} [Z_{n+1} = 2k] = [Z_n = 2k] \cap [X_{n+1} = 0] \Longrightarrow P(Z_{n+1} = 2k) = 1/2^n \times 1/2 = 1/2^{n+1} \\ [Z_{n+1} = 2k+1] = [Z_n = 2k] \cap [X_{n+1} = 1] \Longrightarrow P(Z_{n+1} = 2k+1) = 1/2^n \times 1/2 = 1/2^{n+1} \end{cases}.$$

Bilan : $Z_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 2^{n+1}-1\rrbracket)$.
• Pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{H}_n$ est vraie.

3.a) Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a : $0 \leqslant \dfrac{X_k(\omega)}{2^k} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$, donc la série de terme général $\dfrac{X_k(\omega)}{2^k}$ converge vers un réel positif, inférieur ou égal à $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$.

b) De même, $\forall\,\omega \in \Omega,\ 0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{X_k(\omega)}{2^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}\cdot$ Comme $U(\omega) = U_n(\omega) + \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{X_k(\omega)}{2^k}$, on a bien $0 \leqslant U_n(\omega) \leqslant U(\omega) \leqslant U_n(\omega) + \dfrac{1}{2^n} \leqslant 1$.

c) D'après b), $U_n(\omega) + \dfrac{1}{2^n} \leqslant x \Longrightarrow U(\omega) \leqslant x \Longrightarrow U_n(\omega) \leqslant x$. Donc, $\Big[U_n + \dfrac{1}{2^n} \leqslant x\Big] \subset [U \leqslant x] \subset [U_n \leqslant x]$.

d) Par suite, $P\Big(U_n + \dfrac{1}{2^n} \leqslant x\Big) \leqslant P(U \leqslant x) \leqslant P(U_n \leqslant x)$. Or, $P(U_n \leqslant x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor 2^n x\rfloor} P(Z_n = k) = \frac{\lfloor 2^n x\rfloor + 1}{2^n}$ et $P\Big(U_n + \dfrac{1}{2^n} \leqslant x\Big) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor 2^n x\rfloor - 1} P(Z_n = k) = \frac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n}$, d'où, $\dfrac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n} \leqslant P(U \leqslant x) \leqslant \dfrac{\lfloor 2^n x\rfloor + 1}{2^n}\cdot$
Comme $2^n x - 1 < \lfloor 2^n x\rfloor \leqslant 2^n x$, on a : $\forall\,n \in \mathbf{N}^*,\ x - \dfrac{1}{2^n} \leqslant P(U \leqslant x) \leqslant x + \dfrac{1}{2^n}\cdot$
Par passage à la limite, on en déduit que $\forall x \in [0,1],\ P(U \leqslant x) = x$, donc U suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
5. Soit $x \in [0,1]$. D'après 4.d), $F_{U_n}(x) - F_U(x) \geqslant 0$ (F_{U_n} et F_U : fonctions de répartition de U_n et U). Or, $x \in [0,1] \Longrightarrow F_{U_n}(x) - F_U(x) = \dfrac{\lfloor 2^n x\rfloor + 1}{2^n} - x = \dfrac{\lfloor 2^n x\rfloor - 2^n x + 1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, car $-1 < \lfloor 2^n x\rfloor - 2^n x \leqslant 0$.
Le théorème d'encadrement $\Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} |F_{U_n}(x) - F_U(x)| = 0$, donc la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers U.

Kholle C :

1) RAS (non corrigé aici)

2)

Exercice 13.1

1. Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, X_i est une variable discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a donc : $(X_i \leq k)=\bigcup_{j=1}^{k}(X_i=j)$. Par incompatibilité des événements ($X_i=j$), on obtient :

$$P(X_i \leq k)=\sum_{j=1}^{k}P(X_i=j)=\sum_{j=1}^{k}(1-p)^{j-1}p=p\frac{1-(1-p)^k}{p}=1-(1-p)^k.$$

Finalement, on a : $P(X_i>k)=1-P(X_i\leq k)=(1-p)^k$.

Remarque. On pouvait aussi écrire directement : $P(X_i>k)=\sum_{j=k+1}^{+\infty}P(X_i=j)$.

2. a) Pour tout entier naturel non nul k, on a : $P(I_n>k)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i>k)\right)$.

L'indépendance des variables X_i assure que : $P(I_n>k)=\left((1-p)^k\right)^n=(1-p)^{kn}$.

De plus, on sait que : $\forall k\in\mathbb{N}^*, (I_n>k-1)=(I_n=k)\cup(I_n>k)$, car I_n est à valeurs entières.

Par incompatibilité, on obtient : $P(I_n=k)=P(I_n>k-1)-P(I_n>k)$.

Finalement, on a : $\forall k\in\mathbb{N}^*, P(I_n=k)=\left((1-p)^n\right)^{k-1}\left(1-(1-p)^n\right)$.

On en conclut que la variable I_n suit la loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^n$.

b) On en déduit : $E(I_n)=\dfrac{1}{1-(1-p)^n}$.

3. a) Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a : $X_i(\Omega)=\mathbb{N}^*$. On en déduit : $S_n(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel non nul k, on a : $P(S_n\leq k)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i\leq k)\right)$.

L'indépendance des variables assure : $P(S_n\leq k)=\left(1-(1-p)^k\right)^n$. De plus, on a : $(S_n\leq k)=(S_n=k)\cup(S_n\leq k-1)$.

Par incompatibilité, on obtient :

$$P(S_n = k) = P(S_n \leq k) - P(S_n \leq k-1) = \left(1-(1-p)^k\right)^n - \left(1-(1-p)^{k-1}\right)^n.$$

b) En posant $q = 1-p$, on obtient, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$: $P(S_n = k) = \left(1-q^k\right)^n - \left(1-q^{k-1}\right)^n$.

En appliquant deux fois la formule du binôme de Newton, on obtient, pour tout N de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N} k\,P(S_n = k) = \sum_{k=1}^{N} k\left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i\left(q^k\right)^i - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i\left(q^{k-1}\right)^i\right].$$

Pour chacune des deux sommes à l'intérieur du crochet le premier terme vaut 1, on a donc :

$$\sum_{k=0}^{N} k\,P(S_n = k) = \sum_{k=1}^{N} k\left[\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i\left(q^k\right)^i - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i\left(q^{k-1}\right)^i\right]$$

On obtient deux doubles sommes dont les indices de sommation sont indépendants, on permute alors les deux sommes de chaque double sigma :

$$\sum_{k=0}^{N} k\,P(S_n = k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} k\binom{n}{i}(-1)^i\left(q^k\right)^i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} k\binom{n}{i}(-1)^i\left(q^{k-1}\right)^i.$$

Comme $\left(q^k\right)^i = q^{ki} = \left(q^i\right)^k$ et $\left(q^{k-1}\right)^i = q^{(k-1)i} = \left(q^i\right)^{k-1}$, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{N} k\,P(S_n = k) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i \sum_{k=1}^{N} k\left(q^i\right)^k - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i \sum_{k=1}^{N} k\left(q^i\right)^{k-1}.$$

Comme p est dans $]0,1[$, on a : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ q^i \in]0,1[$. On en déduit :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} k\left(q^i\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-q^i\right)^2}$$ (somme d'une série géométrique "dérivée" de paramètre q^i).

De même, on a : $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} k\left(q^i\right)^k = q^i \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} k\left(q^i\right)^{k-1} = \dfrac{q^i}{\left(1-q^i\right)^2}$.

On en déduit que $\sum\limits_{k=1}^{N} k\,P(S_n = k)$ possède une limite finie quand N tend vers $+\infty$ et :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,P(S_n = k) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\frac{(-1)^i q^i}{\left(1-q^i\right)^2} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\frac{(-1)^i}{\left(1-q^i\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\frac{(-1)^i\left(q^i-1\right)}{\left(1-q^i\right)^2}.$$

Finalement, on obtient : $E(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\dfrac{(-1)^{i-1}}{1-q^i}$.

Kholle B :

1) Non corrigé

2)

Exercice 13.3

1. a) La variable X_1 est égale au nombre de succès lors de la répétition de r épreuves indépendantes et à deux issues. La probabilité du succès est p, on en déduit que X_1 suit la loi binomiale de paramètres r et p.

b) Soit i et j deux entiers tels que : $0 \leq i \leq j \leq r$.

Sachant que i personnes ont été jointes le premier jour, pour que j personnes soient jointes, **en tout**, à l'issue du deuxième jour, il faut et il suffit que $j-i$ personnes aient été jointes au cours du deuxième jour (toujours de façon indépendante donc le processus est binomial).

On a donc : $P_{(X_1=i)}(X_2=j)=\binom{r-i}{j-i}p^{j-i}(1-p)^{r-j}$.

c) On a facilement : $X_2(\Omega)=[\![0,r]\!]$.

La formule des probabilités totales, associée au système complet d'événements $\{(X_1=i), i\in[\![0,r]\!]\}$, donne : $\forall j \in [\![0,r]\!], P(X_2=j)=\sum_{i=0}^{r}P_{(X_1=i)}(X_2=j)P(X_1=i)$.

A l'issue du deuxième jour, le nombre de personnes jointes est nécessairement supérieur ou égal au nombre de personnes jointes à l'issue du premier jour : si $i>j$, $P_{(X_1=i)}(X_2=j)=0$.

On en déduit : $P(X_2=j)=\sum_{i=0}^{j}\binom{r-i}{j-i}p^{j-i}(1-p)^{r-j}\binom{r}{i}p^{i}(1-p)^{r-i}$.

On a déjà vu, à plusieurs reprises, que $\binom{r-i}{j-i}\binom{r}{i}=\binom{r}{j}\binom{j}{i}$.

On obtient alors : $P(X_2=j)=\binom{r}{j}(1-p)^{2r-2j}p^{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(1-p)^{j-i}$.

Grâce à la formule du binôme de Newton, on a : $P(X_2=j)=\binom{r}{j}(1-p)^{2r-2j}p^{j}(2-p)^{j}$.

Finalement, on a : $\forall j \in [\![0,r]\!], P(X_2=j)=\binom{r}{j}(1-p(2-p))^{r-j}(p(2-p))^{j}$.

On en conclut que la variable X_2 suit la loi binomiale de paramètres r et $p(2-p)=1-q^2$.

2. Posons, pour tout entier naturel n non nul, $R(n)$: " X_n suit la loi $\mathcal{B}(r,1-q^n)$ ".

La question **1. a)** correspond à l'initialisation.

Soit n un entier naturel non nul tel que X_n suit la loi binomiale de paramètres r et $1-q^n$.

On a déjà : $X_{n+1}(\Omega)=[\![0,r]\!]$.

La formule des probabilités totales, associée au système complet d'événem[…] $\{(X_n=i), i\in[\![0,r]\!]\}$, donne : $\forall j \in [\![0,r]\!], P(X_{n+1}=j)=\sum_{i=0}^{r}P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)P(X_n=i)$.

De la même façon qu'à la question **1.b)**, on peut prouver que pour tout couple (i,j) de $[\![0,$[…] tels que $j>i$ on a : $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)=\binom{r-i}{j-i}p^{j-i}(1-p)^{r-j}$.

On obtient alors : $P(X_{n+1}=j)=\sum_{i=0}^{j}\binom{r-i}{j-i}p^{j-i}(1-p)^{r-j}\binom{r}{i}(1-q^n)^i q^{n(r-i)}$. Soyons astucieux

$$P(X_{n+1}=j)=\sum_{i=0}^{j}\binom{r-i}{j-i}p^{j-i}(1-p)^{r-j}\binom{r}{i}(1-q^n)^i q^{n(r-j)+n(j-i)}.$$

On a toujours $\binom{r-i}{j-i}\binom{r}{i}=\binom{r}{j}\binom{j}{i}$ donc :

$$P(X_{n+1}=j)=\binom{r}{j}(1-p)^{r-j}q^{n(r-j)}\sum_{i=0}^{j}p^{j-i}\binom{j}{i}(1-q^n)^i q^{n(j-i)}.$$

$$P(X_{n+1}=j)=\binom{r}{j}q^{r-j}(q^n)^{(r-j)}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(1-q^n)^i(pq^n)^{j-i}.$$

La formule du binôme de Newton donne :

$P(X_{n+1}=j)=\binom{r}{j}q^{r-j}(q^n)^{(r-j)}(1-q^n+pq^n)=\binom{r}{j}(q^{n+1})^{(r-j)}(1-q^{n+1})$, car $p=1-q$.

La variable X_{n+1} suit donc la loi binomiale de paramètres r et $1-q^{n+1}$.

On en déduit que $R(n+1)$ est vraie.

Finalement, on a montré par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, la variable X_n suit la loi binomiale de paramètres r et $1-q^n$.

3. a) L'événement $(Z\leq j)$ est réalisé lorsque la secrétaire a réussi à joindre tous les correspondants en moins de j jours. Ceci signifie qu'à l'issue du $j^{\text{ème}}$ jour, tous les correspondants ont été joints. On obtient ainsi : $(Z\leq j)=(X_j=r)$.

b) Pour tout entier naturel j non nul, on a :

$P(Z=j)=P(Z\leq j)-P(Z\leq j-1)=P(X_j=r)-P(X_{j-1}=r)$.

Pour tout entier naturel N non nul, on a :

$$\sum_{j=1}^{N}jP(Z=j)=\sum_{j=1}^{N}j\left(P(X_j=r)-P(X_{j-1}=r)\right)=\sum_{j=1}^{N}j\left((1-q^j)^r-(1-q^{j-1})^r\right).$$

$$\sum_{j=1}^{N}jP(Z=j)=\sum_{j=1}^{N}j(1-q^j)^r-\sum_{j=0}^{N-1}(j+1)(1-q^j)^r=N(1-q^N)^r-\sum_{j=0}^{N-1}(1-q^j)^r.$$

En ajoutant et enlevant N, on obtient la relation suivante, notée $(*)$:

$$\sum_{j=1}^{N}jP(Z=j)=N\left((1-q^N)^r-1\right)+\sum_{j=0}^{N-1}\left(1-(1-q^j)^r\right).$$

Comme $|q|<1$, on a : $\lim\limits_{N\to+\infty}q^N=0$ et $(1-q^N)^r-1\underset{N\to+\infty}{\sim}-rq^N$.

Ainsi, on a : $N\left((1-q^N)^r-1\right)\underset{N\to+\infty}{\sim}-Nrq^N$.

Comme $\ln q<0$, on obtient : $\lim\limits_{N\to+\infty}Nq^N=\lim\limits_{N\to+\infty}Ne^{N\ln q}=0$.

Enfin, pour tout j de $[\![0, N-1]\!]$, on a : $1-(1-q^j)^r = 1-\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-q^j)^k = -\sum_{k=1}^{k}\binom{r}{k}(-1)^k q^{jk}$.

Ainsi, on a : (**) $\sum_{j=0}^{N-1}\left(1-(1-q^j)^r\right) = -\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}(-1)^k\left(\sum_{j=0}^{N-1}(q^k)^j\right)$.

On reconnaît une somme partielle de série géométrique de raison q^k qui est, pour tout k de $[\![1, r]\!]$, un élément de $]0,1[$. La somme $\sum_{j=0}^{N-1}(q^k)^j$ possède donc une limite finie quand N tend vers $+\infty$. Il en est de même pour $\sum_{j=0}^{N-1}\left(1-(1-q^j)^r\right)$.

Nous pouvons alors passer à la limite quand N tend vers $+\infty$ dans la relation (*) et nous obtenons l'existence de l'espérance de la variable Z et sa valeur : $E(Z)=\sum_{j=0}^{+\infty}\left(1-(1-q^j)^r\right)$.

c) Reprenons l'égalité (**), écrite 6 lignes plus haut :

$\sum_{j=0}^{N-1}\left(1-(1-q^j)^r\right) = -\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}(-1)^k\left(\sum_{j=0}^{N-1}(q^k)^j\right) \underset{N\to+\infty}{\to} -\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}\frac{(-1)^k}{1-q^k}$. On en déduit :

$$E(Z)=\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{1-q^k}.$$

d) Dans le cas où r vaut 1, on trouve : $E(Z)=\sum_{k=1}^{1}\binom{1}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{1-q^k}=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}$.

Ce résultat était bien sûr prévisible puisque, dans ce cas, la variable Z désigne alors le temps d'attente du premier succès dans une succession d'épreuves indépendantes à deux issues, la probabilité du succès étant p. La variable Z suit alors la loi géométrique de paramètre p dont l'espérance vaut bien $\frac{1}{p}$.

Défi :

Par la formule de transfert

$$\mathrm{E}\left(X(X-1)\ldots(X-r+1)\right)=\sum_{k=r}^{+\infty}\frac{k!}{(k-r)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda^r$$